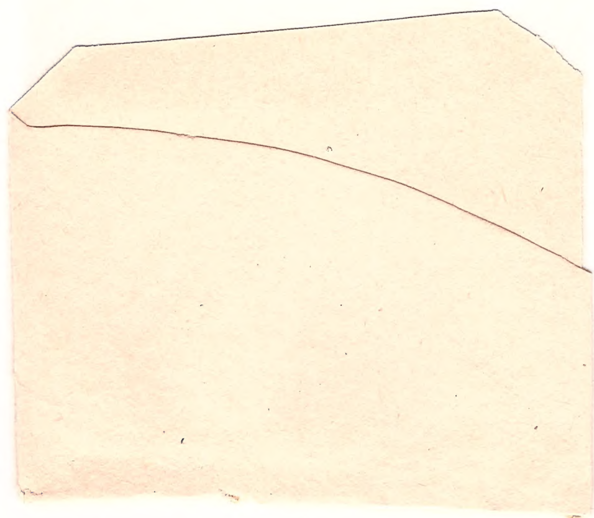
Ю. Г. Сосулин

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ



Ю. Г. Сосулин

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ



Москва «Советское радио» 1978

6Ф2
С66
УДК 621.391:519.27

Сосулин Ю. Г.

С66 Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Советское радио, 1978. — 320 с., ил.

Книга посвящена статистической теории обнаружения и оценивания сигналов на фоне помех и ее применению к задачам радиотехнического типа. Теория охватывает все основные модели сигналов и помех.

Излагаются методы синтеза оптимальных и квазиоптимальных систем приема сигналов. Рассматриваются методы анализа систем (аналитические и машинные). Рассматриваются методы преодоления априорной неопределенности. Теория иллюстрируется конкретными примерами, имеющими и самостоятельную практическую ценность.

Книга предназначена для научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов высших учебных заведений.

С $\frac{30401-018}{046(01)-78}$ 31-77 6Ф.2 32.84

Редакция литературы по вопросам космической радиоэлектроники

ИБ № 354

Юрий Георгиевич Сосулин

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Редактор *В. Ю. Севастьянова*
Художественный редактор *Н. С. Шеин*
Обложка художника *Б. К. Силаева*
Технический редактор *А. А. Белоус*
Корректор *Л. В. Озерова*

Сдано в набор 5.07.77 Подписано в печать 13.12.77 Т-19975
Формат 70×100/16 Бумага типографская № 2
Литературная гарн. Высокая печать
Объем 26 усл. п. л., 23,68 уч.-изд. л. Тираж 6800 экз.
Заказ 230 Цена 2 р. 30 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы обнаружения и оценивания полезных сигналов на фоне помех приходится решать во многих областях науки и техники: в физике, радиолокации, радионавигации, радиосвязи, радиоастрономии, автоматическом управлении, гидроакустике, сейсмологии и др. Одна из основных задач теории обнаружения и оценивания состоит в разработке методов синтеза систем, обрабатывающих сигналы наилучшим (в том или ином смысле) образом. Важной задачей теории является также анализ систем, позволяющий определить качество обработки сигналов.

В подавляющем большинстве практических ситуаций принимаемый процесс, содержащий помеху (шум) и, быть может, полезный сигнал, носит случайный характер. Поэтому теория обнаружения и оценивания является статистической теорией, базирующейся на достижениях теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики.

Вопросам применения теории случайных процессов и математической статистики к синтезу и анализу алгоритмов приема сигналов посвящена не одна тысяча статей. Имеется и целый ряд книг, освещающих те или иные проблемы обнаружения и оценивания (некоторые из этих работ приведены в списке литературы, который ни в коей мере не претендует на полноту).

Следует отметить, что в большинстве книг по приему сигналов изложение материала ведется, как правило, в рамках следующих предположений и постановок задач: 1) статистические свойства помех (и нередко сигналов) описываются гауссовской математической моделью; 2) априорные статистические сведения о сигналах и помехах предполагаются полностью известными; 3) задачи обнаружения (при фиксированном и нефиксированном времени наблюдения) и оценивания решаются раздельно.

Первые два из отмеченных предположений носят характер довольно жестких ограничений, которые при решении практических задач не всегда допустимы. Третье предположение — о раздельном решении задач обнаружения и оценивания (составляющих единый процесс приема сигналов) — по сути дела, также является ограничением, хотя и менее жестким, чем предыдущие.

В предлагаемой вниманию читателя книге излагается статистическая теория обнаружения и оценивания сигналов, для которой отмеченные выше ограничения не являются обязательными.

В качестве математических моделей сигналов и помех в книге используются все основные виды случайных процессов, в частности, гауссовские процессы, марковские процессы, процессы диффузионного типа, процессы Ито, квазимартингалы. Главное внимание уделяется вопросам приема стохастических сигналов, т. е. таких сигналов, моделями которых служат те или иные случайные процессы. Это позволяет охватить при компактном изложении довольно широкий круг практически интересных задач. Решения более простых задач, как например при детер-

минированных и квазидетерминированных сигналах, легко находятся путем конкретизации общих результатов. Вопросам перехода от общих задач к частным в книге уделяется особое внимание.

Рассматриваемые в книге вопросы обнаружения включают в себя проверку статистических гипотез при фиксированном и нефиксированном (случайном) времени наблюдения. Вопросы оценивания сигналов включают оценку параметров, линейную и нелинейную фильтрацию, интерполяцию (сглаживание) и экстраполяцию (прогнозирование).

Значительное внимание в книге уделяется проблеме совместного обнаружения и оценивания сигналов, при этом рассматриваются различные методы и подходы. Отметим, что методы совместного обнаружения и оценивания интересны не только сами по себе — как методы синтеза многофункциональных систем. Они помогают также решать многие задачи, для которых привлечение методов совместной обработки, на первый взгляд, кажется необязательным. Однако эффективное решение ряда задач приема сигналов стало возможным лишь в рамках совместного обнаружения и оценивания.

Наряду с изложением общих методов синтеза и анализа систем (оптимальных и квазиоптимальных), в книге рассматривается их применение к решению конкретных задач обработки сигналов, представляющих практический интерес. Применения излагаемой теории иллюстрируются, главным образом, на задачах радиотехнического типа. Как известно, такого рода задачи являются основным «потребителем» теории обнаружения и оценивания. Однако в последние годы эта теория находит все большее применение и в других областях науки и техники, среди которых есть и довольно далекие от радиотехники, как например физиология (см. тематический выпуск по теории обнаружения [129]).

Большинство приводимых в книге результатов по обнаружению и оцениванию сигналов получено автором (лично или в соавторстве) и опубликовано в статьях. Изложение материала ведется иногда конспективно, при этом даются ссылки на статьи, в которых соответствующие вопросы рассмотрены более подробно.

В книге принята тройная нумерация формул: первое число дает номер главы, второе — номер параграфа, третье — номер формулы. При ссылках внутри параграфа используется только номер формулы.

Работа над рукописью книги протекала при поддержке А. Г. Сайбеля. На начальном этапе исследований автор работал в тесном контакте с Р. Л. Стратоновичем, советы которого были весьма полезны. По ряду результатов, опубликованных ранее и вошедших в данную книгу, полезные замечания высказали И. Н. Амиантов, И. А. Большаков, В. И. Тихонов. Улучшению книги способствовало ее рецензирование Б. Р. Левиным и Э. М. Хазен. При подготовке рукописи к печати помощь оказали В. В. Костров, М. М. Фишман и А. П. Шахурин.

Всем указанным лицам автор выражает искреннюю благодарность.

Глава 1

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СИГНАЛЫ

1.1. СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ЕЕ ОПИСАНИЯ

1.1.1. Случайная функция и конечномерные распределения вероятностей. Существуют различные способы построения (определения) случайной функции $\{\xi(t)\}$. В прикладных задачах большое распространение получил способ, основанный на понятии случайной величины, изучаемой в теории вероятностей [33]. При этом под случайной функцией понимается семейство случайных величин $\xi(t)$, зависящих от параметра t, пробегающего произвольное множество значений T. При каждом фиксированном значении аргумента $t=t_i$ случайная функция является случайной величиной $\xi_i=\xi(t_i)$.

Если параметр t интерпретируется как время, то случайная функция $\xi(t)$ называется случайным процессом. Аргумент случайной функции может быть, вообще говоря, и векторной переменной $\mathbf{t}$. При этом случайная функция $\xi(\mathbf{t})$ называется случайным полем.

Конкретный вид, который принимает случайный процесс в результате некоторого опыта (наблюдения), называется выборочной функцией, реализацией или траекторией случайного процесса. Множество X, на котором определены всевозможные траектории случайного процесса $\xi(t)$, называется его фазовым пространством.

Время t может принимать дискретные или непрерывные значения (в зависимости от того, как определено множество T). В соответствии с этим случайные процессы подразделяются на процессы с дискретным и непрерывным временем. Фазовое пространство X также может быть некоторым дискретным (конечным или счетным) множеством, а может представлять собой, например, всю действительную числовую ось (или ее отрезок).

При построении случайного процесса на основе понятия совокупности случайных величин естественно и теоретико-вероятностное описание процесса строить на основе вероятностного описания величин, т. е. с использованием законов распределения вероятностей. При каждом фиксированном значении t_i функция $\xi(t_i)$ является случайной величиной, и ее полной характеристикой служит функция распределения вероятностей

$$F(x,\ t_i)=P\{\xi(t_i)<x\} \qquad (1.1.1)$$

— вероятность того, что случайный процесс $\xi(t)$ в момент времени t_i примет значение, меньшее параметра $x\in X$. Определив вероятность (1) для любых $t_i\in T$, можно рассматривать распределение вероятностей $F(x,\ t)$ как функцию времени и интерпретировать как одномерную функцию распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t)$.

Более полное вероятностное описание случайного процесса $\xi(t)$ дает его n-мерная ($n>1$) функция распределения вероятностей

$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}, \qquad (1.1.2)$$
$$x_k \in X,\ t_k \in T, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта функция должна удовлетворять условиям согласованности, вытекающим из ее определения:

$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_n, +\infty, \ldots, +\infty, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+r}), \qquad (1.1.3)$$
$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}),$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — любая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$.

Если функция (2) дифференцируема по $x_1, \ldots, x_n$, то можно определить n-мерную плотность распределения вероятностей случайного процесса

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \qquad (1.1.4)$$

Плотность вероятностей (4) является неотрицательной функцией, удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$$

и условиям согласованности, вытекающим из (3).

Вероятностные свойства случайного процесса $\xi(t)$ можно также описать n-мерной характеристической функцией, представляющей собой математическое ожидание случайной величины $\exp\left[i \sum_{k=1}^{n} u_k \xi(t_k)\right]$:

$$\Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{M} \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} u_k \xi(t_k)\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right] dF_{t_1 \ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Если существует плотность вероятностей (4), то

$$\Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right] p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (1.1.5)$$

С другой стороны, по заданной характеристической функции (5) можно определить плотность вероятностей

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k\right] \Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n)\, du_1 \ldots du_n.$$
$$(1.1.6)$$

Поскольку функция распределения (2) однозначно определяется характеристической функцией (5) (см., например, [33]), то рассмотренные способы описания случайного процесса $\xi(t)$ эквивалентны.

Случайный процесс называется стационарным в узком смысле, если его конечномерный закон распределения произвольного порядка не меняется при любом сдвиге по времени, т. е. если для любых n и τ справедливо равенство

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = p(x_1, \ldots, x_n, t_1+\tau, \ldots, t_n+\tau). \quad (1.1.7)$$

Отметим, что полное вероятностное описание случайного процесса при помощи конечномерных распределений возможно для процесса с дискретным временем, когда процесс представляет собой конечную последовательность случайных величин. В остальных случаях в рамках конечномерных распределений, вообще говоря, нельзя описать процесс $\xi(t)$ полностью. Однако рассматривая конечный интервал наблюдения T и выбирая точки $t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n$ достаточно близко друг к другу, при большом n можно с достаточной для многих практических задач точностью аппроксимировать процесс $\{\xi(t),\ t\in T\}$ последовательностью случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$. В этом случае при описании процесса можно ограничиться конечномерными распределениями.

Если рассматривается случайный процесс с непрерывным временем, то в целях его полного описания в рамках распределений вероятностей следует перейти к континуальным распределениям, устремляя $n\to\infty$, $\max(t_{i+1}-t_i)\to 0$. Эти распределения могут существовать при соответствующей нормировке. Подобный способ используется в дальнейшем при рассмотрении функционала отношения правдоподобия.

Теоретико-вероятностное описание случайных процессов с непрерывным временем можно дать также, используя аппарат дифференциальных уравнений. О них пойдет речь далее при рассмотрении специальных классов случайных процессов.

1.1.2. Моментные и корреляционные функции. Для описания свойств случайного процесса иногда целесообразно использовать моментные и корреляционные функции [119], которые строятся путем прямого обобщения соответствующих понятий теории вероятностей — моментов и кумулянтов случайной величины.

Моментная функция n-го порядка $m_n(t_1, \ldots, t_n)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяется соотношением

$$m_n(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{M}\,[\xi(t_1)\,\xi(t_2)\ldots\xi(t_n)]. \quad (1.1.8)$$

Особую роль играет моментная функция 1-го порядка:

$$m_1(t) = \mathrm{M}\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dF_t(x) \quad (1.1.9)$$

— математическое ожидание процесса $\xi(t)$. При каждом фиксированном значении аргумента $t=t_i$ функция (9) представляет собой число, равное математическому ожиданию случайной величины $\xi(t_i)$.

Моментную функцию n-го порядка можно найти, дифференцируя n-мерную характеристическую функцию

$$m_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{i^n}\,\frac{\partial^n\Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n)}{\partial u_1\ldots\partial u_n}\Bigg|_{u_1=\ldots=u_n=0}.$$

Корреляционные функции $K_n(t_1, \ldots, t_n)$ процесса $\xi(t)$, аналогом которых являются кумулянты или семиинварианты случайной величины, также определяются по характеристической функции

$$K_n = (t_1, \ldots, t_n) = \\ = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \ln \Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n)}{\partial u_1 \ldots \partial u_n} \Bigg|_{u_1 = \ldots = u_n = 0}. \qquad (1.1.10)$$

Моментные и корреляционные функции первых двух порядков связаны между собой простыми соотношениями

$$m_1(t_1) = K_1(t_1),$$
$$m_2(t_1, t_2) = K_2(t_1, t_2) + K_1(t_1) K_1(t_2).$$

Корреляционная функция второго порядка

$$K_2(t_1, t_2) = M\xi(t_1)\xi(t_2) - M\xi(t_1)M\xi(t_2) \qquad (1.1.11)$$

при $t_1 = t_2 = t$ представляет собой дисперсию случайного процесса $\xi(t)$:

$$K_2(t, t) = M\xi^2(t) - [M\xi(t)]^2 = D(\xi(t)).$$

Располагая последовательностью корреляционных функций

$$K_1(t_1), K_2(t_1, t_2), K_3(t_1, t_2, t_3), \ldots, \qquad (1.1.12)$$

можно представить характеристическую функцию согласно (10) в виде

$$\Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) = \\ = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega = 1}^{n} K_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) u_\alpha, \ldots, u_\omega\right\}. \qquad (1.1.13)$$

Если последовательность (12) такова, что ряд в (13) сходится, то последовательность корреляционных функций однозначно определяет конечномерные законы распределения вероятностей. В противном случае это не так.

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция второго порядка зависит только от разности аргументов:

$$M\xi(t) = \text{const}, \quad K_2(t_i, t_j) = K_2(t_j - t_i). \qquad (1.1.14)$$

Очевидно, что процесс стационарный в узком смысле (см. (7)), всегда является стационарным в широком смысле. Обратное, вообще говоря, неверно.

1.1.3. Условные распределения вероятностей и условные математические ожидания. Понятия условного распределения случайного процесса и условного математического ожидания играют важную роль в задачах обнаружения и выделения сигналов на фоне помех. К этим понятиям можно прийти следующим образом.

Рассмотрим вероятность совместного выполнения неравенств

$$\xi(t_n) < x_n; \ \xi(t_{n-1}) < x_{n-1}; \ \ldots; \ \xi(t_{n-m}) < x_{n-m}$$

при условии, что

$$x_{n-m-1} \leqslant \xi(t_{n-m-1}) < x'_{n-m-1}; \ x_{n-m-2} \leqslant \xi(t_{n-m-2}) < \\ < x'_{n-m-2}, \ \ldots; \ x_1 \leqslant \xi(t_1) < x'_1, \qquad (1.1.15)$$

где $x_i, x'_i \in X, \ x'_i > x_i, \ i = 1, \ldots, n$.

Эта вероятность, согласно определению условных вероятностей событий, равна

$$P\{\xi(t_n)<x_n, \ \ldots, \ \xi(t_{n-m})<x_{n-m} \mid x_{n-m-1}\leqslant\xi(t_{n-m-1})<x'_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1\leqslant\xi(t_1)<x'_1\} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t_n)<x_n, \ldots, \xi(t_{n-m})<x_{n-m}, \ x_{n-m-1}\leqslant\xi(t_{n-m-1})<x'_{n-m-1},\ldots, \ x_1\leqslant\xi(t_1)<x'_1\}}{P\{x_{n-m-1}\leqslant\xi(t_{n-m-1})<x'_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1\leqslant\xi(t_1)<x'_1\}}. \tag{1.1.16}$$

Условная вероятность (16) есть условная функция распределения случайного вектора $\xi(t_n), \ldots, \xi(t_{n-m})$ относительно события (15); обозначим ее $F\{x_n, \ldots, x_{n-m} \mid x_{n-m-1}, x'_{n-m-1}, \ldots, x_1, x'_1\}$ (для сокращения записи временные параметры $t_1, \ldots, t_n$ не выписываем).

Если существуют конечномерные плотности вероятностей (4), описывающие случайный процесс $\xi(t)$, то соотношение (16) можно переписать в виде

$$F(x_n, \ \ldots, \ x_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ x'_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1, \ x'_1) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_n}\cdots\int\limits_{-\infty}^{x_{n-m}}\int\limits_{x_{n-m-1}}^{x'_{n-m-1}}\cdots\int\limits_{x_1}^{x'_1} p(z_n, \ \ldots, \ z_1, \ t_n, \ \ldots, \ t_1)\,dz_n\ldots dz_1}{\int\limits_{x_{n-m-1}}^{x'_{n-m-1}}\cdots\int\limits_{x_1}^{x'_1} p(z_{n-m-1}, \ \ldots, \ z_1, \ t_{n-m-1}, \ \ldots, \ t_1)\,dz_{n-m-1}\ldots dz_1}.$$

Переходя затем к пределу при $x'_{n-m-1}\to x_{n-m-1}, \ldots, x'_1\to x_1$, получим, что условная функция распределения

$$F(x_n, \ \ldots, \ x_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1) =$$

$$= P\{\xi(t_n)<x_n, \ \ldots, \ \xi(t_{n-m})<x_{n-m} \mid \xi(t_{n-m-1})=x_{n-m-1}, \ \ldots, \ \xi(t_1)=x_1\} \tag{1.1.17}$$

равна

$$F(x_n, \ x_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_n}\int\limits_{-\infty}^{x_{n-m}} p(z_n, \ \ldots, z_{n-m}, x_{n-m-1}, \ldots, x_1, \ t_n, \ldots, t_1)\,dz_n\ldots dz_{n-m}}{p(x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1, \ t_{n-m-1}, \ \ldots, \ t_1)}. \tag{1.1.18}$$

Определим условную плотность как производную условной функции

$$p(x_n, \ \ldots, \ x_{n-m}, \ t_n, \ \ldots, \ t_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1, \ t_{n-m-1}, \ \ldots, \ t_1) =$$

$$= \frac{\partial^{n-m}F(x_n, \ \ldots, \ x_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1)}{\partial x_n\ldots\partial x_{n-m}}. \tag{1.1.19}$$

Продифференцировав (18), получим формулу

$$p(x_n, \ \ldots, \ x_{n-m}, \ t_n, \ \ldots, \ t_{n-m} \mid x_{n-m-1}, \ \ldots, x_1, \ t_{n-m-1}, \ \ldots, \ t_1) =$$

$$= \frac{p(x_n, \ \ldots, \ x_1, \ t_n, \ \ldots, \ t_1)}{p(x_{n-m-1}, \ \ldots, \ x_1, \ t_{n-m-1}, \ \ldots, \ t_1)}, \tag{1.1.20}$$

определяющую условную плотность вероятностей через безусловные плотности вероятностей. Отсюда и из свойств безусловных плотностей вероятностей следует, что

$$p(x_n, \ldots, x_{n-m}, t_n, \ldots, t_{n-m} | x_{n-m-1}, \ldots, x_1, t_{n-m-1}, \ldots, t_1) \geqslant 0, \tag{1.1.21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, \ldots, x_{n-m}, t_n, \ldots, t_{n-m} | x_{n-m-1}, \ldots, x_1, t_{n-m-1}, \ldots, t_1)\, dx_n \ldots dx_{n-m} = 1.$$

Используя условную плотность вероятностей (19), определим условную моментную функцию

$$M[\xi(t_n), \ldots, \xi(t_{n-m}) | \xi(t_{n-m-1}) = x_{n-m-1}, \ldots, \xi(t_1) = x_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_n \ldots x_{n-m} p(x_n, \ldots, x_{n-m}, t_n, \ldots, t_{n-m} | x_{n-m-1}, \ldots, x_1, t_{n-m-1}, \ldots, t_1)\, dx_n \ldots dx_{n-m}. \tag{1.1.22}$$

Эта функция является условным математическим ожиданием произведения случайных величин $\xi(t_n)$, ..., $\xi(t_{n-m})$ при фиксированных значениях величин $\xi(t_{n-m-1})$, ..., $\xi(t_1)$.

Остановимся подробнее на простейшем варианте, когда

$$M[\xi(t_2) | \xi(t_1) = x_1] = M[\xi(t_2) | x_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_2, t_2 | x_1, t_1)\, dx_2. \tag{1.1.23}$$

Полное или безусловное математическое ожидание величины $\xi(t_2)$ можно найти, усреднив условное математическое ожидание (23):

$$M\xi(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_2, t_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_2, t_2 | x_1, t_1)\, p(x_1, t_1)\, dx_2 dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} M[\xi(t_2) | x_1]\, p(x_1, t_1)\, dx_1. \tag{1.1.24}$$

Отметим следующее обстоятельство. Рассмотренные здесь условные распределения вероятностей и условные математические ожидания случайных величин $\xi(t_n)$, ..., $\xi(t_{n-m})$ при фиксированных значениях $\xi(t_{n-m-1})$, ..., $\xi(t_1)$ определены как некоторые неслучайные функции параметров x_n, ..., x_{n-m}, x_{n-m-1}, ..., x_1. Однако, если в эти функции [см. (19)—(22)] вместо параметров x_{n-m-1}, ..., x_1 подставить сами случайные величины $\xi(t_{n-m-1})$, ..., $\xi(t_1)$, то указанные условные распределения и условные математические ожидания станут случайными функциями. Так, например, условная плотность (18) будет функцией параметров x_n, ..., x_{n-m} и случайных величин $\xi(t_{n-m-1})$, ..., $\xi(t_1)$.

Формула полного математического ожидания (24) при таком подходе примет вид

$$M\xi(t_2) = M\{M[\xi(t_2) | \xi(t_1)]\}. \tag{1.1.25}$$

В дальнейшем нам потребуется еще одно свойство условного математического ожидания. Если $f(\xi(t_1))$ — некоторая функция случайной величины $\xi(t_1)$, то

$$M[f(\xi(t_1))\xi(t_2) | \xi(t_1)] = f(\xi(t_1))\, M[\xi(t_2) | \xi(t_1)]. \tag{1.1.26}$$

Формулы (25), (26) допускают непосредственное обобщение на векторные случайные величины.

Остановимся на вопросе о существовании условного математического ожидания. Предположим, что

$$\mathrm{M}\,|\xi(t_2)| < \infty. \tag{1.1.27}$$

Применяя неравенство Чебышева

$$P\{|\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathrm{M}\xi^2}{\varepsilon^2} \tag{1.1.27'}$$

к случайной величине $\widehat{\xi} = \mathrm{M}\,[|\xi(t_2)|\,|\xi(t_1)]$,

получим

$$P\{\widehat{\xi} < N\} = P\{\sqrt{\widehat{\xi}} < \sqrt{\widehat{N}}\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{\mathrm{M}\widehat{\xi}}{N} = 1 - \frac{\mathrm{M}\,|\xi(t_2)|}{N}.$$

Отсюда и из (27) вытекает равенство

$$P\{\mathrm{M}\,[|\xi(t_2)|\,|\xi(t_1)] < \infty\} = \lim_{N\to\infty} P\{\mathrm{M}\,[|\xi(t_2)|\,|\xi(t_1)] < N\} = 1.$$

Таким образом, если выполняется (27), т. е. если существует безусловное математическое ожидание случайной величины $\xi(t_2)$, то с вероятностью 1 существует и ее условное математическое ожидание.

1.1.4. Гауссовский процесс. Если случайный процесс таков, что все его корреляционные функции, начиная с корреляционной функции третьего порядка, равны нулю

$$K_3(t_1, t_2, t_3) = K_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \ldots = 0 \tag{1.1.28}$$

для любых t, то такой процесс является гауссовским. Характеристическая функция этого процесса согласно (13), (28) определяется соотношением

$$\Theta(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \exp\left\{i \sum_{\alpha=1}^{n} K_1(t_\alpha)\, u_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} K_2(t_\alpha, t_\beta)\, u_\alpha u_\beta\right\}. \tag{1.1.29}$$

Подставляя (29) в (6) и вычисляя интеграл, найдем n-мерную плотность вероятностей гауссовского процесса

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = (2\pi)^{-n/2} \det{}^{-1/2} \|K_2(t_\alpha, t_\beta)\| \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\,[x_\alpha - K_1(t_\alpha)]\,[x_\beta - K_1(t_\beta)]\right\}, \tag{1.1.30}$$

где $\|h_{\alpha\beta}\|$ — матрица, обратная корреляционной матрице:

$$\|h_{\alpha\beta}\| = \|K_2(t_\alpha, t_\beta)\|^{-1},$$

$$\sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} K_2(t_\beta, t_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \gamma. \end{cases}$$

Представив квадратичную форму в матричной записи перепишем (30):

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \\ = (2\pi)^{n/2} \det{}^{-1/2} \mathbf{K} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{к}_1)^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{к}_1)\right\}, \quad (1.1.31)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{к}_1 = (K_1(t_1) \ldots, K_1(t_n))$ — векторы-столбцы; T — операция транспонирования. Корреляционная матрица $\mathbf{K} = \| K_2(t_\alpha, t_\beta) \|$ является симметрической, ибо из определения корреляционной функции (11) следует, что

$$K_2(t_\alpha, t_\beta) = K_2(t_\beta, t_\alpha).$$

Предполагается, что матрица $\mathbf{K}$ положительно определена, т. е. квадратичная форма $\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} > 0$ для всех ненулевых векторов $\mathbf{x}$. Из этого предположения следует, что матрица $\mathbf{K}$ невырождена, т. е. обратная матрица $\mathbf{K}^{-1}$ ($\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица) существует.

Одномерная и двумерная плотности вероятностей нестационарного гауссовского процесса, как следует из (30), определяются выражениями

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{[x - K_1(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad (1.1.32)$$

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma(t_1)\sigma(t_2)\sqrt{1 - R^2(t_1, t_2)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2[1 - R^2(t_1, t_2)]}\left[\left(\frac{x_1 - K_1(t_1)}{\sigma(t_1)}\right)^2 - \right.\right. \\ \left.\left. - 2R(t_1, t_2)\left(\frac{x_1 - K_1(t_1)}{\sigma(t_1)}\right)\left(\frac{x_2 - K_1(t_2)}{\sigma(t_2)}\right) + \left(\frac{x_2 - K_1(t_1)}{\sigma(t_2)}\right)^2\right]\right\}, \quad (1.1.33)$$

где $\sigma^2(t) = K_2(t, t)$; $R(t_1, t_2)$ — нормированная корреляционная функция (коэффициент корреляции):

$$R(t_1, t_2) = \frac{K_2(t_1, t_2)}{\sqrt{K_2(t_1, t_1)K_2(t_2, t_2)}} = \frac{K_2(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}.$$

Если выполняются условия (14), то гауссовский процесс является стационарным. Отметим, что для гауссовского процесса из стационарности в широком смысле вытекает стационарность в узком смысле (это следует из (28)).

1.2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В данном параграфе кратко приводятся основные сведения о марковских процессах, которые нам понадобятся в дальнейшем. Ряд сведений об этих процессах можно найти в [6, 38, 119, 132, 139]. Строгое изложение теории марковских процессов дано в [32, 39].

1.2.1. Определение. Случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ называется марковским, если для любых $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, принадлежащих области T, условное распределение вероятностей случайной величины $\xi(t_n)$ относительно величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1})$ совпадает с условным распределением величины $\xi(t_n)$ относительно $\xi(t_{n-1})$ в том смысле, что для любого $x \in X$ справедливо с вероятностью 1 равенство

$$P\{\xi(t_n) < x \mid \xi(t_{n-1}), \xi(t_{n-2}), \ldots \xi(t_1)\} = \\ = P\{\xi(t_n) < x \mid \xi(t_{n-1})\}. \quad (1.2.1)$$

Для условной функции распределения вероятностей

$$F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, x_1, t_1) = \\ = P\{\xi(t_n) < x_n | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, \xi(t_1) = x_1\}, \quad (1.2.2)$$

где $x_i \in X$, $i=1, \ldots, n$, марковское свойство приводит к обычному равенству

$$F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, x_1, t_1) = \\ = F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1.2.3)$$

Определение (1), (3) свидетельствует о том, что вероятностные свойства марковского процесса в будущем при фиксированном значении процесса в настоящем не зависят от того, какие значения принимал процесс в прошлом. В этом смысле и понимается термин «процесс без последствия» — марковский процесс.

Рассмотрим основные виды марковских процессов, классифицируемых в соответствии с задаваемыми множеством временных значений T и фазовым пространством X.

1.2.2. Процессы с дискретным временем и с дискретным фазовым пространством. Под дискретным фазовым пространством X понимается некоторое конечное или счетное множество, состоящее из элементов x_1, $x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots$ Марковский процесс с дискретным временем и дискретным фазовым пространством представляет собой последовательность дискретных случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_i), \ldots$, для которых выполняется марковское свойство

$$P\{\xi(t_n) = x_\alpha | \xi(t_{n-1}) = x_\beta, \ldots, \xi(t_1) = x_\omega\} = \\ = P\{\xi(t_n) = x_\alpha | \xi(t_{n-1}) = x_\beta\}, \quad (1.2.4)$$

вытекающее из (2), (3). Такой случайный процесс называется также дискретной цепью Маркова. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots$ представляют собой возможные значения или состояния цепи Маркова.

Условную вероятность (4), которая называется переходной вероятностью или вероятностью перехода из состояния x_β в состояние x_α, можно определить через безусловные вероятности:

$${}_n\pi_{\alpha\beta} = P\{\xi(t_n) = x_\alpha | \xi(t_{n-1}) = x_\beta\} = \\ = \frac{P\{\xi(t_n) = x_\alpha, \ \xi(t_{n-1}) = x_\beta\}}{P\{\xi(t_{n-1}) = x_\beta\}}. \quad (1.2.5)$$

Переходные вероятности составляют матрицы переходных вероятностей

$${}_n\Pi = \|{}_n\pi_{\beta\alpha}\|_1^l, \ {}_n\Pi = \|{}_n\pi_{\beta\alpha}\|_1^\infty, \ \ldots, \quad (1.2.6)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

являющиеся квадратными матрицами с конечным l либо с бесконечным числом элементов (в зависимости от числа состояний цепи Маркова).

Переходные вероятности (5) удовлетворяют очевидным соотношениям:

$${}_n\pi_{\beta\alpha} \geqslant 0, \qquad \sum_\alpha {}_n\pi_{\beta\alpha} = 1. \quad (1.2.7)$$

Матрицы, элементы которых обладают свойством (7), называются стохастическими.

Для полного определения цепи Маркова нужно, кроме стохастических матриц (6), задать вектор начальных вероятностей

$$P\{\xi(t_1)=x_1\}=\pi_1,\quad P\{\xi(t_1)=x_2\}=\pi_2,\ \ldots,\ P\{\xi(t_1)=x_\alpha\}=\pi_\alpha. \qquad (1.2.8)$$

Если переходные вероятности

$$\pi_{\alpha\beta}=P\{\xi(t_n)=x_\alpha\,|\,\xi(t_{n-1})=x_\beta\} \qquad (1.2.9)$$

не зависят от индекса n (т. е. от момента времени t_n), то цепь Маркова называется однородной. В противном случае имеем неоднородную цепь Маркова.

Однородная цепь Маркова полностью определяется одной стохастической матрицей и вектором начальных вероятностей. Вероятность перехода за n шагов для однородной цепи Маркова

$$P\{\xi(t_{m+n})=x_\alpha\,|\,\xi(t_m)=x_\beta\}=\pi_{\beta\alpha}(n)$$

определяется, как нетрудно убедиться, при помощи рекуррентного соотношения

$$\pi_{\beta\alpha}(n+1)=\sum_{\gamma=1}^{l}\pi_{\beta\gamma}\pi_{\gamma\alpha}(n),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (1.2.10)$$

Зная вектор начальных вероятностей (8) и вероятности перехода за n шагов, можно найти безусловные вероятности

$$P\{\xi(t_n)=x_\alpha\}=\pi_\alpha(n)$$

по формуле

$$\pi_\alpha(n)=\sum_{\gamma=1}^{l}\pi_\gamma\pi_{\gamma\alpha}(n-1).$$

Используя свойства условных вероятностей, можно получить соотношение

$$\pi_{\beta\alpha}(n+m)=\sum_{\gamma=1}^{l}\pi_{\beta\gamma}(m)\,\pi_{\gamma\alpha}(n), \qquad (1.2.11)$$

$$n,\ m=1,\ 2,\ \ldots;\ \beta,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l,$$

обобщающее (10). При матричной форме записи оно примет вид

$$\Pi^{n+m}=\Pi^m\Pi^n, \qquad (1.2.12)$$

где

$$\Pi^n=\|\pi_{\beta\alpha}(n)\|=[\|\pi_{\beta\alpha}\|]^n,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Соотношение (12) (или (11)) является уравнением Колмогорова — Чепмена для переходных вероятностей.

1.2.3. Процессы с дискретным временем и с непрерывным фазовым пространством. Марковским процессом с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством будем называть последовательность непрерывных случайных величин $\{\xi(t_n),\ n=1,\ 2,\ \ldots\}$, удовлетворяющих марковскому свойству (1), (3). Из этого определения следует, что существует производная условной функции вероятностей (3):

$$\frac{\partial F(x_n,\ t_n\,|\,x_{n-1},\ t_{n-1})}{\partial x_n}=p(x_n,\ t_n\,|\,x_{n-1},\ t_{n-1}). \qquad (1.2.13)$$

Она называется переходной плотностью вероятностей или плотностью вероятностей перехода. Для условных плотностей вероятностей (1.1.19) марковское свойство записывается в виде

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \ldots, x_1, t_1) = \\ = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \qquad (1.2.14)$$

Переходная плотность (13) удовлетворяет соотношениям

$$p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_i) \geqslant 0,$$

$$\int p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) dx_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

выполняющимся для любых условных плотностей (см. (1.1.21)). Кроме того, вследствие марковости она, очевидно, должна удовлетворять некоторому дополнительному условию. Получим его. Для этого представим безусловную плотность трех величин $\xi(t_i)$, $\xi(t_j)$, $\xi(t_k)$, $i<j<k$, в следующем виде (используем (1.1.20)):

$$p(x_i, x_j, x_k, t_i, t_j, t_k) = p(x_i, t_i) \times \\ \times p(x_j, t_j | x_i, t_i) p(x_k, t_k | x_j, x_i, t_j, t_i).$$

Интегрируя обе части этого равенства по x_j и учитывая марковское свойство (14), получим

$$p(x_k, t_k | x_i, t_i) = \\ = \int p(x_k, t_k | x_j, t_j) p(x_j, t_j | x_i, t_i) dx_j. \qquad (1.2.15)$$

Это соотношение называется уравнением Колмогорова — Чепмена для переходных плотностей вероятностей.

Таким образом, марковское свойство для условных плотностей приводит к уравнению Колмогорова — Чепмена. Справедливо и обратное утверждение: если любая система условных плотностей $p(x_k, t_k | x_i, t_i)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена, то описываемый ими случайный процесс является марковским.

Задав начальную плотность $p(x_1, t_1)$ и зная переходные плотности $p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$, можно определить плотность вероятностей вектора $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$

$$p(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \\ = p(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}). \qquad (1.2.16)$$

При определении марковского процесса вид плотностей вероятностей не конкретизируется. При этом марковская последовательность может представлять собой как негауссовский, так и гауссовский случайный процесс с дискретным временем. Однако в силу ограничения (15) не любая гауссовская последовательность может обладать марковским свойством. Действительно, условная плотность

$$p(x_k, t_k | x_i, t_i) = \frac{p(x_k, x_i, t_k, t_i)}{p(x_i, t_i)}$$

для гауссовского процесса согласно (1.1.32), (1.1.33) имеет вид

$$p(x_k, t_k | x_i, t_i) = \frac{1}{\sigma(t_k) \sqrt{2\pi[1 - R^2(t_i, t_k)]}} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{[\sigma(t_i) x_k - \sigma(t_k) R(t_i, t_k) x_i]^2}{2[1 - R^2(t_i, t_k)] \sigma^2(t_i) \sigma^2(t_k)} \right\} \qquad (1.2.17)$$

(не ограничивая степени общности, приняли $K_1(t)=\mathbf{M}\xi(t)=0$). Условные плотности, входящие в правую часть (15), выражаются аналогичным образом. Подставляя эти выражения, а также (17) в выражение (15) и интегрируя, получим равенство, которое справедливо, если

$$R(t_i, t_k)=R(t_i, t_j)R(t_j, t_k). \tag{1.2.18}$$

Таким образом, гауссовская последовательность является марковской, если ее коэффициенты корреляции удовлетворяют условию (18).

1.2.4. Процессы с непрерывным временем и с дискретным фазовым пространством. Случайные процессы этого типа относятся к классу скачкообразных. Описываемая скачкообразным случайным процессом система некоторый промежуток времени неподвижна в фазовом пространстве, затем в случайный момент времени скачком меняет свое положение и т. д. Реализация скачкообразного процесса носит ступенчатый характер.

Рассмотрим марковский процесс $\{\xi(t),\ 0\leqslant t<\infty\}$ с непрерывным временем и с дискретным фазовым пространством X, состоящим из конечного числа элементов (состояний) $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_l$.

Вероятности состояний $P\{\xi(t)=x_\alpha\}=\pi_\alpha(t)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\pi_\alpha(t)=1$$

для любых t $(0\leqslant t<\infty)$. В силу марковского свойства для условных вероятностей выполняется равенство

$$P\{\xi(t)=x_\alpha\,|\,\xi(s)=x_\beta,\ \xi(r)=x_\gamma,\ \ldots,\ \xi(v)=x_\mu\}= \\ =P\{\xi(t)=x_\alpha\,|\,\xi(s)=x_\beta\} \tag{1.2.19}$$

при любых $t>s>r>\ldots>v$. Переходные вероятности (19)

$$P\{\xi(t)=x_\alpha\,|\,\xi(s)=x_\beta\}=\pi_{\beta\alpha}(s, t);\quad \alpha, \beta=1, 2, \ldots, l \tag{1.2.20}$$

удовлетворяют обычным условиям

$$\pi_{\beta\alpha}(s, t)\geqslant 0,\qquad \sum_{\alpha=1}^{l}\pi_{\beta\alpha}(s, t)=1. \tag{1.2.21}$$

Кроме того, в силу марковского свойства они удовлетворяют дополнительному условию — уравнению Колмогорова — Чепмена

$$\pi_{\beta\alpha}(r, t)=\sum_{\gamma=1}^{l}\pi_{\beta\gamma}(r, s)\,\pi_{\gamma\alpha}(s, t);\qquad 0\leqslant r<s<t, \tag{1.2.22}$$

которое выводится аналогично (15). Переходные вероятности (20) и вектор начальных вероятностей

$$\pi_\alpha(0)=P\{\xi(0)=x_\alpha\},\ \alpha=1, 2, \ldots, l$$

полностью определяют рассматриваемый марковский процесс.

Далее предположим, что переходные вероятности можно представить в виде

$$\pi_{\beta\alpha}(s, t)=\begin{cases}1-q_\beta(t)(t-s)+o(t-s), & \beta=\alpha,\\ q_{\beta\alpha}(t)(t-s)+o(t-s), & \beta\neq\alpha,\end{cases} \tag{1.2.21'}$$

где $o(t-s)$ — члены более высокого порядка малости, чем $(t-s)$; в силу (21) необходимо, чтобы

$$q_\beta(t) \geqslant 0;\ q_{\beta\alpha}(t) \geqslant 0; q_\beta(t) = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{l} q_{\beta\alpha}(t). \tag{1.2.23}$$

Тогда существуют производные

$$\left.\frac{\partial\pi_{\beta\alpha}(s,\ t)}{\partial s}\right|_{s=t} = \begin{cases} q_\beta(t), & \beta=\alpha, \\ -q_{\beta\alpha}(t) & \beta\neq\alpha, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial\pi_{\beta\alpha}(s,\ t)}{\partial t}\right|_{t=s} = \begin{cases} -q_\beta(s), & \beta=\alpha, \\ q_{\beta\alpha}(s), & \beta\neq\alpha. \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Продифференцируем обе части уравнения (22) по r и затем положим $r=s$. В результате получим обратную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\pi_{\beta\alpha}(s,\ t)}{\partial s} = q_\beta(s)\,\pi_{\beta\alpha}(s,\ t) - \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq\beta}}^{l} q_{\beta\gamma}(s)\,\pi_{\gamma\alpha}(s,\ t). \tag{1.2.25}$$

Дифференцируя обе части (22) по t, полагая $t=s$ и заменяя переменные $(r,\ s)$ на $(s,\ t)$, получим прямую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\pi_{\beta\alpha}(s,\ t)}{\partial t} = -q_\alpha(t)\,\pi_{\beta\alpha}(s,\ t) + \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq\alpha}}^{l} \pi_{\beta\gamma}(s,\ t)\,q_{\gamma\alpha}(t). \tag{1.2.26}$$

Начальные условия для (26) и конечные условия для (25) очевидны:

$$\pi_{\beta\alpha}(s,\ s) = \pi_{\beta\alpha}(t,\ t) = \delta_{\beta\alpha} = \begin{cases} 1, & \beta=\alpha, \\ 0, & \beta\neq\alpha. \end{cases}$$

Системы уравнений (25) и (26) определяют эволюцию переходных вероятностей в обратном $(s<t)$ и прямом $(t>s)$ времени соответственно.

Умножив обе части системы (26) на $p\{\xi(s)=x_\beta\}=\pi_\beta(s)$ и затем просуммировав по всем значениям β, получим систему дифференциальных уравнений

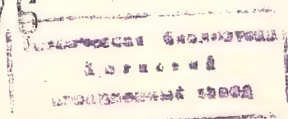
$$\frac{d}{dt}\,\pi_\alpha(t) = -q_\alpha(t)\,\pi_\alpha(t) + \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq\alpha}}^{l} \pi_\gamma(t)\,q_{\gamma\alpha}(t), \tag{1.2.27}$$

определяющую эволюцию безусловных вероятностей. Начальные условия задаются вектором начальных вероятностей $\pi_\alpha(0)$, $\alpha=1, \ldots, l$.

В случае однородных процессов, когда

$$\pi_{\beta\alpha}(s,\ t) = \pi_{\beta\alpha}(t-s),$$

производные (24) вырождаются в константы q_β, $q_{\beta\alpha}$, при этом системы уравнений (25) — (27) упрощаются.



1.2.5. Процессы с непрерывным временем и непрерывным фазовым пространством. Марковские процессы этого класса протекают непрерывно во времени и имеют непрерывные реализации (траектории). Среди таких непрерывных марковских процессов важнейшее место занимают диффузионные процессы, имеющие непрерывные с вероятностью 1 траектории.

Статистические свойства диффузионного марковского процесса $\xi(t)$ определяются коэффициентами переноса $a(x, t)$ и диффузии $b(x, t)$, которые равны

$$a(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{M}\left[\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t)=x\right],$$

$$b(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{M}\left\{\frac{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]^2}{\Delta t} \middle| \xi(t)=x\right\}. \qquad (1.2.28)$$

Кроме существования пределов (28), будем предполагать, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{M}\left\{\frac{[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]^k}{\Delta t} \middle| \xi(t)=x\right\}=0, \quad k>2. \qquad (1.2.29)$$

Для диффузионного марковского процесса остаются справедливыми все формулы п. 1.2.3, описывающие переходные плотности. При этом нужно учитывать, что временной параметр t в рассматриваемом случае изменяется непрерывно (а не дискретно, как в п. 1.2.3). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, обозначим переходную плотность (13) через $p(x, t|y, r)$, $t>r$.

Уравнение (15) перепишем в виде

$$p(x, t|z, \tau) = \int p(x, t|y, r)\, p(y, r|z, \tau)\, dy, \ t>r>\tau. \qquad (1.2.30)$$

Непрерывное изменение времени позволяет перейти к дифференциальному уравнению для переходной плотности вероятностей. Предположим, что последнюю можно разложить в ряд Тейлора:

$$p(x, t|y, r) = p(x, t|z, r) + \sum_k \frac{(y-z)^k}{k!} \frac{\partial^k p(x, t|z, r)}{\partial z^k}.$$

Подставим это соотношение в (30) и затем перейдем к пределу при $(r-\tau)\to 0$, учитывая (28), (29). В результате получим уравнение в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial p(x, t|z, \tau)}{\partial \tau} = -a(z, \tau)\frac{\partial p(x, t|z, \tau)}{\partial z} - \frac{1}{2} b(z, \tau)\frac{\partial^2 p(x, t|z, \tau)}{\partial z^2}. \qquad (1.2.31)$$

Оно называется первым (обратным) уравнением Колмогорова.

Путем предельного перехода в (30) можно получить и второе (прямое) уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial p(x, t|z, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x, t)\, p(x, t|z, \tau)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x, t)\, p(x, t|z, \tau)]. \qquad (1.2.32)$$

Оно называется также уравнением Фоккера — Планка.

Конечное и начальное условия для (31), (32) задаются, очевидно, соотношениями

$$p(x, t|z, t)=\delta(x-z); \quad p(x, \tau|z, \tau)=\delta(x-z),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция [28].

Умножив обе части уравнения (32) на плотность вероятностей $p(z, \tau)$ и проинтегрировав затем по z, получим уравнение Фоккера — Планка для безусловной плотности

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[a(x, t)p(x, t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x, t)p(x, t)]. \quad (1.2.33)$$

При этом должна быть задана некоторая плотность вероятностей $p_0(x, t_0)$, служащая начальным условием для уравнения (33),

$$p(x, t_0)=p_0(x, t_0). \quad (1.2.34)$$

Если известно, что все траектории диффузионного процесса $\xi(t)$ начинаются в момент t_0 в одной и той же точке x_0, то $p_0(x, t_0)=\delta(x-x_0)$. При этом плотность, определяемая уравнением (33), совпадает с переходной плотностью $p(x, t|x_0, t_0)$, определяемой уравнением (32).

Марковский, в частности, диффузионный процесс является однородным по времени, если переходная плотность зависит от временных параметров только через их разность:

$$p(x, t|y, r)=p(x, t-r|y). \quad (1.2.35)$$

Коэффициенты (28) диффузионного однородного (по времени) процесса

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int(x-y)\,p(x, t-r|y)\,dx=a(y), \qquad \Delta t=t-r$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int(x-y)^2\,p(x, t-r|y)\,dx=b(y), \quad (1.2.36)$$

не зависят от времени. Если диффузионный марковский процесс является однородным не только по времени (см. (35)), но по фазовому пространству, когда переходная плотность зависит от координат x и y только через их разность $(x-y)$, то коэффициенты переноса и дуффизии (36) обращаются в константы a, b. Возможен также случай, когда марковский процесс является однородным по фазовому пространству и неоднородным по времени. В этом случае коэффициенты (28) зависят только от времени: $a(t)$, $b(t)$.

Если марковский процесс однороден по времени и, кроме того, начальное распределение не зависит от времени, то такой процесс будет стационарным (в узком смысле, см. (1.1.7)). Этот результат вытекает из (16), (35).

Обратимся теперь к формуле (18). Для непрерывного процесса она приобретает вид

$$R(t, \tau)=R(t, r)R(r, \tau), \quad t>r>\tau. \quad (1.2.37)$$

Гауссовский процесс является марковским тогда и только тогда, когда его коэффициент корреляции $R(t, r)$ удовлетворяет условию (37).

В случае стационарного процесса, когда $R(t, r)=R(t-r)$, уравнение (37) принимает вид

$$R(t+\tau)=R(t)R(\tau), \quad t, \tau>0.$$

Решением этого уравнения является (см. [139], т. 1, с. 444) либо

$$R(t)=0,\ t>0, \tag{1.2.38}$$

либо найдется такая постоянная величина γ, что

$$R(t)=\exp(-\gamma t),\ t>0. \tag{1.2.39}$$

Таким образом, стационарный марковский гауссовский процесс является экспоненциально-коррелированным (исключая случай (38)).

Важнейшую роль при изучении диффузионных процессов играет аппарат дифференциальных уравнений. Выше с помощью уравнений в частных производных дано описание плотностей вероятностей диффузионного марковского процесса (см. (31)—(33)).

Однако дифференциальными уравнениями можно описывать и сам случайный процесс, если воспользоваться специальным аппаратом стохастических дифференциальных уравнений.

Стохастические дифференциальные уравнения рассматривались П. Ланжевеном еще в 1908 г. Однако строгое построение теории стохастических дифференциальных уравнений было дано много позже (в 50-е годы). Современное состояние этой теории отражено в [31; 32, т. III].

Чтобы записать стохастическое дифференциальное уравнение, необходимо ввести понятие случайного процесса с независимыми приращениями. Случайный процесс $\omega(t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых моментов времени $t_1<t_2<\ldots<t_n$ $(n\geqslant 3)$ случайные величины $\omega(t_2)-\omega(t_1)$, $\omega(t_3)-\omega((t_2)$, ..., $\omega(t_n)-\omega(t_{n-1})$ взаимно независимы. Нетрудно убедиться, что такой случайный процесс обладает марковским свойством и может рассматриваться как один из примеров марковского процесса.

Особое место среди процессов с независимыми приращениями занимает процесс, имеющий непрерывные с вероятностью 1 траектории. Такой процесс обладает замечательным свойством — он является гауссовским (см., например, [81]). Этот случайный процесс называется броуновским движением или винеровским процессом.

Рассмотрим стандартный винеровский процесс $\{\omega(t),\ t\geqslant 0\}$, т. е. гауссовский процесс с независимыми приращениями, для которого $\omega(0)=0$, $\mathbf{M}\omega(t)=0$, $\mathbf{D}\omega(t)=t$. С винеровским процессом $\omega(t)$ тесно связан гауссовский процесс с независимыми значениями $\xi_0(t)$, для которого

$$\mathbf{M}\xi_0(t)=0,\quad \mathbf{M}\xi_0(t)\,\xi_0(t+\tau)=\delta(\tau), \tag{1.2.40}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Интеграл от этого дельта-коррелированного гауссовского процесса является, очевидно, гауссовским процессом, имеющим независимые приращения. При этом в силу (40)

$$\mathbf{M}\int_0^t \xi_0(\tau)\,d\tau=0,\ \ \mathbf{D}\int_0^t \xi_0(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^t \mathbf{M}\xi_0(t')\,\xi_0(t'')\,dt'\,dt''=\int_0^t\int_0^t \delta(t'-t'')\,dt'\,dt''=t.$$

Таким образом, дельта-коррелированный гауссовский процесс $\xi_0(t)$ можно рассматривать как производную винеровского процесса:

$$\omega(t)=\int_0^t \xi_0(\tau)\,d\tau,\quad \xi_0(t)=\frac{d}{dt}\,\omega(t)\equiv\dot{\omega}(t). \tag{1.2.41}$$

Отметим, что строгое построение подобных дельта-коррелированных процессов (не обязательно гауссовских) дается в теории обобщенных случайных процессов [27, 81].

Теперь вернемся к описанию диффузионного процесса дифференциальным уравнением. Стохастическое дифференциальное уравнение, определяющее диффузионный марковский процесс $\xi(t)$ с коэффициентами переноса $a(x, t)$ и диффузии $b(x, t)$, имеет вид

$$d\xi(t) = a(\xi(t), t)\,dt + \sqrt{b(\xi(t), t)}\,d\omega(t), \tag{1.2.42}$$

где $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс. Используя дельта-коррелированный процесс $\xi_0(t)$ (41), уравнение (42) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\xi}(t) = a(\xi(t), t) + \sqrt{b(\xi(t), t)}\,\xi_0(t). \tag{1.2.43}$$

Уравнения (42), (43) можно записать также в интегральной форме

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(\xi(\tau), \tau)\,d\tau + \int_0^t \sqrt{b(\xi(\tau), \tau)}\,d\omega(\tau), \tag{1.2.44}$$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(\xi(\tau), \tau)\,d\tau + \int_0^t \sqrt{b(\xi(\tau), \tau)}\,\xi_0(\tau)\,d\tau. \tag{1.2.45}$$

Строго говоря, обычно применяемые понятия дифференциала и производной при записи (42), (43) не годятся, так что диффузионный марковский процесс $\xi(t)$ в обычном смысле недифференцируем. Это является следствием особых свойств винеровского процесса $\omega(t)$, производная которого $\xi_0(t)$, если ее понимать в обычном смысле, не существует, поскольку согласно (40)

$$D\,\xi_0(t) = \infty. \tag{1.2.46}$$

Однако уравнениям (42)—(45) можно придать строгий смысл, если воспользоваться понятиями стохастического дифференциала и стохастического интеграла. При этом следует иметь в виду, что определяться они могут по-разному. При записи уравнений (42)—(45) стохастические дифференциалы и стохастические интегралы (вторые интегралы в формулах (44), (45)) понимаются в смысле Ито *).

Случайный процесс $\xi(t)$, получаемый в результате решения уравнения (42) (или (43)—(45)), является марковским. Действительно, поскольку процесс $\omega(t)$ имеет независимые приращения ($\xi_0(t)$ — процесс с независимыми значениями), то распределение вероятностей $\xi(t)$ в любой момент времени $t > t_0$ при фиксированном значении $\xi(t_0)$, служащем начальным условием при решении (42), (43), не зависит от траектории процесса, которую он имел при $t < t_0$.

---

*) Стохастический дифференциал и стохастический интеграл Ито определены в § 1.4 при рассмотрении более широкого класса случайных процессов, чем марковские диффузионные процессы. Другая (симметризованная) форма записи стохастических уравнений рассматривается в § 1.5.

Систематическое изучение свойств решений стохастических дифференциальных уравнений проведено в [31]. Там, в частности, доказан следующий результат. Пусть функции $a(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ непрерывны по совокупности переменных, причем при некотором K

$$|a(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2) \tag{1.2.47}$$

и для каждого N существует такое L_N, что при $|x| \leqslant N$, $|y| \leqslant N$ выполнено неравенство

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leqslant L_N |x - y|. \tag{1.2.48}$$

Тогда процесс $\xi(t)$, являющийся решением стохастического уравнения

$$d\xi(t) = a[\xi(t), t]\, dt + \sigma[\xi(t), t]\, d\omega(t), \tag{1.2.49}$$

будет диффузионным марковским процессом с коэффициентом переноса $a(x, t)$ и коэффициентом диффузии $b(x, t) = \sigma^2(x, t)$.

В том случае, когда коэффициент переноса $a(x, t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$ зависит от координаты x линейно, а коэффициент диффузии $b(t)$ не зависит от x, уравнение (42) (и (49)) является линейным стохастическим уравнением. Решение $\xi(t)$ такого уравнения представляет собой линейный функционал винеровского процесса $\omega(t)$, и поэтому диффузионный марковский процесс $\xi(t)$ является гауссовским. Еще понизив степень общности, рассмотрим уравнение

$$\dot{\xi}(t) = -\gamma\xi(t) + \sigma\xi_0(t) \tag{1.2.50}$$

($\gamma > 0$, $\sigma > 0$ — постоянные величины), определяющее однородный диффузионный марковский гауссовский процесс. Записав решение этого уравнения

$$\xi(t) = \xi(0)\exp(-\gamma t) + \sigma\int_0^t \exp[-\gamma(t - \tau)]\,\xi_0(\tau)\, d\tau$$

($\xi(0)$ — начальное условие) и вычислив корреляционную функцию (1.1.11) процесса $\xi(t)$, получим при $t \to \infty$ (в стационарном случае)

$$K_2(\tau) = (\sigma^2/2\gamma) R(\tau), \tag{1.2.51}$$

где $R(\tau) = \exp(-\gamma|\tau|)$. В результате пришли, конечно, к прежнему результату, полученному иным способом (см. (39)).

В общем случае решения уравнений (42), (49) являются нестационарными негауссовскими диффузионными процессами.

1.2.6. Многомерные марковские процессы. Векторный случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in T\}$, составленный из скалярных случайных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_m(t)\}$, является m-мерным марковским процессом, если для любых $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_m$, принадлежащих фазовому пространству $\mathbf{X}$ процесса $\xi(t)$, с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\begin{gathered} P\{\xi_1(t_n) < x_1, \xi_2(t_n) < x_2, \ldots, \xi_m(t_n) < x_m \mid \xi_1(t_{n-1}), \ldots \\ \ldots, \xi_1(t_1), \xi_2(t_{n-1}), \ldots, \xi_2(t_1), \ldots, \xi_m(t_{n-1}), \ldots, \xi_m(t_1)\} = \\ = P\{\xi_1(t_n) < x_1, \xi_2(t_n) < x_2, \ldots, \xi_m(t_n) < x_m \mid \xi_1(t_{n-1}), \\ \xi_2(t_{n-1}), \ldots, \xi_m(t_{n-1})\}. \end{gathered} \tag{1.2.52}$$

Приведенное определение многомерного марковского процесса является естественным обобщением определения одномерного (скалярного) марковского процесса $\xi(t)$, данного в п. 1.2.1. Такое же непосредственное обобщение допускают и формулы, описывающие распределения вероятностей марковского процесса.

Так, например, для m-мерного марковского процесса с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством остается справедливым уравнение Колмогорова — Чепмена (15) с очевидной заменой x на $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Многомерное обобщение уравнения Фоккера — Планка (33) имеет вид

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(\mathbf{x}, t)\, p(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[b_{ij}(\mathbf{x}, t)\, p(\mathbf{x}, t)], \tag{1.2.53}$$

где

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{M}\left[\frac{\xi_i(t+\Delta t) - \xi_i(t)}{\Delta t} \,\middle|\, \xi(t) = \mathbf{x}\right], \tag{1.2.54}$$

$$b_{ij}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{M}\left\{\frac{[\xi_i(t+\Delta t) - \xi_i(t)][\xi_j(t+\Delta t) - \xi_j(t)]}{\Delta t} \,\middle|\, \xi(t) = \mathbf{x}\right\}$$

— коэффициенты переноса и диффузии (ср. с (28)).

Компоненты многомерного диффузионного марковского процесса $\xi(t)$ являются решениями системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_i(t) = a_i(\xi(t), t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(\xi(t), t)\, d\omega_j(t), \tag{1.2.55}$$

где $\omega_j(t)$, $j=1, \ldots, m$ — взаимно независимые стандартные винеровские процессы, причем

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(\mathbf{x}, t)\, \sigma_{jk}(\mathbf{x}, t) = b_{ij}(\mathbf{x}, t).$$

Отметим, что каждая из компонент многомерного марковского процесса, вообще говоря, не обладает марковским свойством (п. 1.2.1), т. е. не является одномерным марковским процессом. Однако, если процесс $\xi(t)$ составлен из независимых между собой одномерных марковских процессов $\xi_i(t)$, $i=1, \ldots, m$, то, очевидно, $\xi(t)$ удовлетворяет свойству (52), т. е. в этом частном случае и процесс $\xi(t)$, и каждая из его компонент являются марковскими.

1.2.7. Сложные марковские процессы. Случайный процесс с дискретным временем $\{\xi(t_n),\ n=1, 2, \ldots\}$ называется сложным или m-связным марковским процессом, если существует целое число m такое, что для любых $x \in X$ и n с вероятностью 1

$$P\{\xi(t_n) < x \mid \xi(t_{n-1}), \xi(t_{n-2}), \ldots, \xi(t_1)\} = P\{\xi(t_n) < x \mid \xi(t_{n-1}), \xi(t_{n-2}), \ldots, \xi(t_{n-m})\}. \tag{1.2.56}$$

В том случае, когда $m=1$, этот процесс является обычным или простым марковским процессом (см. п. 1.2.1).

Отметим, что приведенное определение сложного марковского процесса относится лишь к процессу с дискретным временем (в отличие от определения простого марковского процесса в п. 1.2.1, относящегося как к дискретному, так и к непрерывному времени).

Если последовательность $\{\xi_n\}$ составлена из непрерывных случайных величин, то соотношение (56) можно переписать в терминах условных плотностей вероятностей (1.1.19):

$$p(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1) = p(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-m}). \qquad (1.2.57)$$

Рассмотрим теперь векторный случайный процесс $\{\boldsymbol{\xi}_n, n=1, 2, \ldots\}$, образованный из скалярного процесса $\{\xi_n, n=1, 2, \ldots\}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\xi}_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m-1}), \quad n=1, 2, \ldots \qquad (1.2.58)$$

Используя (57) и (1.1.20) получим, что для условной плотности вектора (58) справедливо равенство (при любых n)

$$p(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1} \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1) =$$
$$= p(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1} \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-m}).$$

Это означает, что случайный вектор (58) удовлетворяет марковскому свойству (52), т. е. процесс $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ является m-мерным (но простым) марковским процессом с дискретным временем.

Таким образом, сложный (m-связный) марковский процесс $\{\xi_n\}$ путем образования векторного процесса (58) сводится к простому m-мерному марковскому процессу. При этом процесс $\{\xi_n\}$ является компонентой марковского процесса $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$. Данное обстоятельство позволяет изучать сложные марковские процессы при помощи математического аппарата, разработанного для многомерных марковских процессов с дискретным временем.

В частном случае, когда фазовое пространство процесса представляет собой некоторое конечное множество состояний, можно пойти дальше по пути сведения сложных процессов к простым. В этом случае имеется возможность преобразования сложного марковского процесса в обычную дискретную цепь Маркова, но с большим числом состояний.

Действительно, пусть $\{\xi_n\}$ — сложная однородная цепь Маркова с конечным числом состояний x_α, $\alpha=1, 2, \ldots, N$, для которой заданы вероятности перехода

$$P\{\xi_n = x_\alpha \mid \xi_{n-1} = x_\beta, \ldots, \xi_{n-m} = x_\nu\} = \pi_{\nu, \ldots, \beta, \alpha}; \ \alpha, \beta, \ldots, \nu = 1, \ldots, N. \qquad (1.2.59)$$

Образуем векторный процесс $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ согласно (58). Этот процесс является марковским с переходными вероятностями

$$P\{\xi_n = x_\alpha, \ldots, \xi_{n+m-1} = x_\gamma \mid \xi_{n-1} = x_\beta, \ldots, \xi_{n-m} = x_\nu\} =$$
$$= \pi_{\nu \ldots \beta, \alpha \ldots \gamma}; \quad \alpha, \ldots, \gamma, \beta, \ldots, \nu = 1, \ldots, N \qquad (1.2.60)$$

— вероятности перехода процесса $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ из состояния $(x_\nu, \ldots, x_\beta)$ в состояние $(x_\alpha, \ldots, x_\gamma)$. Поскольку цепь $\{\xi_n\}$ однородная, то, задав вероятности (59), можно вычислить все вероятности (60). Последние образуют стохастическую матрицу $\|\pi_{\nu \ldots \beta, \alpha \ldots \gamma}\|$ порядка N^m. Эта матрица, в свою очередь, определяет простую однородную цепь Маркова с N^m возможными состояниями.

Таким образом, перенумеровав в некотором порядке возможные состояния процесса $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$, обозначив, например,

$$(x_\alpha, \ldots, x_\gamma) = x'_j, \quad (x_\nu, \ldots, x_\beta) = x'_i,$$

приходим к обычной цепи Маркова, состояниями которой являются $x'_1, \ldots, x'_j, \ldots, x'_{N^m}$, а переходные вероятности π'_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N^m$ равны

$$\pi'_{ij} = \pi_{\nu \ldots \beta, \alpha \ldots \gamma}.$$

Важным классом случайных процессов являются мартингалы, их систематическое изучение проведено в [38]. В задачах обработки сигналов мартингалы до недавнего времени почти не использовались. Однако полезные свойства мартингалов и хорошо разработанный для них математический аппарат делают этот класс процессов важным инструментом исследования задач обнаружения и оценивания сигналов. Ниже приводятся краткие сведения о мартингалах.

1.3.1. Определение и примеры. Случайный процесс $\{\xi(t),\ t\in T\}$ называется мартингалом, если $\mathbf{M}|\xi(t)|<\infty$ при всех $t\in T$ и для любых $n\geqslant 1$ и $t_1<\ldots<t_n$ справедливо с вероятностью 1 равенство

$$M[\xi(t_n)\,|\,\xi(t_{n-1}),\ \ldots,\ \xi(t_1)]=\xi(t_{n-1}). \tag{1.3.1}$$

Если при тех же условиях

$$M[\xi(t_n)\,|\,\xi(t_{n-1}),\ \ldots,\ \xi(t_1)]\geqslant\xi(t_{n-1}) \tag{1.3.2}$$

или

$$M[\xi(t_n)\,|\,\xi(t_{n-1}),\ \ldots,\ \xi(t_1)]\leqslant\xi(t_{n-1}), \tag{1.3.3}$$

то процесс $\xi(t)$ называется полумартингалом, а также субмартингалом в случае (2) и супермартингалом в случае (3).

Равенство (1) можно записать также в виде

$$M[\xi(t)\,|\,\xi(r),\ r\leqslant s]=\xi(s);\quad s<t;\quad s,\ t\in T. \tag{1.3.4}$$

Аналогичным образом переписываются и соотношения (2), (3).

Приведем примеры мартингалов. Пусть $\xi_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$, где η_i — взаимно независимые случайные величины, для которых $\mathbf{M}\eta_i=0$. Учитывая введенные ограничения на η_i и используя свойства условных математических ожиданий, получаем

$$M[\xi_n\,|\,\xi_{n-1},\ \ldots,\ \xi_1]=M\left[\eta_n+\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i\,|\,\xi_{n-1},\ \ldots,\ \xi_1\right]=$$
$$=M[\eta_n\,|\,\xi_{n-1},\ \ldots,\ \xi_1]+M[\xi_{n-1}\,|\,\xi_{n-1},\ \ldots,\ \xi_1]=\xi_{n-1}.$$

Таким образом, рассмотренная случайная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет определению (1), т. е. является мартингалом.

Примером мартингала с непрерывным временем служит процесс с независимыми приращениями $\{\xi(t)\}$, для которого $\mathbf{M}[\xi(t)-\xi(r)]=0$. В частности, мартингалом является винеровский процесс.

Отметим, что приведенные примеры мартингалов представляют собой марковские процессы. Однако в общем случае мартингал не обладает марковским свойством *).

1.3.2. Некоторые свойства. Если $\xi(t)$ — мартингал, то

$$\mathbf{M}\xi(t)=\mathrm{const}.$$

Действительно, взяв математические ожидания от обеих частей равенства (4) и используя (1.1.25), получим $\mathbf{M}\xi(t)=\mathbf{M}\xi(s)$ при всех t и s.

---

*) В п. 2.2.9 и 2.3.2 рассматриваются примеры мартингалов, вообще говоря, не являющихся марковскими процессами.

Аналогичным образом, исходя из (2), (3), доказывается, что если $\xi(t)$ — субмартингал (супермартингал), то $\mathbf{M}\xi(t)$ — монотонно неубывающая (невозрастающая) функция t.

К важнейшим свойствам мартингалов относится свойство сходимости, что устанавливается соответствующими теоремами, доказательство которых можно найти, например, в [38].

Пусть процесс $\{\xi_n\}$ — мартингал. Если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\,|\,\xi_n\,| = K < \infty, \tag{1.3.5}$$

то с вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_\infty. \tag{1.3.6}$$

Сходимость имеет место и для полумартингалов. Пусть процесс $\{\xi_n\}$ — полумартингал. Если

$$\sup_n \mathbf{M}\,|\,\xi_n\,| < \infty,$$

то с вероятностью 1 существует предел (6), причем $\mathbf{M}|\xi_\infty|<\infty$.

1.4. ПРОЦЕССЫ ИТО

Прежде чем дать определение случайного процесса Ито, остановимся на понятии стохастического интеграла.

1.4.1. Стохастический интеграл. Пусть $\omega(t)$, $t\in[0, T]$ — стандартный винеровский процесс. Обозначим через $L_2[0, T]$ пространство случайных функций $f(t)$, не зависящих от процесса $\omega_t(s)=\omega(t+s)-\omega(t)$, $s\geqslant 0$, т. е. не зависящих от «будущего» винеровского процесса *), для которых с вероятностью 1

$$\int_0^T f^2(t)\,dt < \infty. \tag{1.4.1}$$

Рассмотрим стохастический интеграл

$$\int_0^T f(t)\,d\omega(t). \tag{1.4.2}$$

При этом определим его вначале для ступенчатой функции $f(t)\in L_2[0, T]$, т. е. такой, для которой существует разбиение отрезка $[0, T]$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$, что $f(t)=f(t_k)$ при $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$. В этом случае стохастический интеграл

$$\int_0^T f(t)\,d\omega(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]. \tag{1.4.3}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда $f(t)$ — любая функция из $L_2[0, T]$. Показано [30], что существует последовательность ступенчатых функций $f_n(t)\in L_2[0, T]$, для которой с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2\,dt = 0.$$

---

*) Функцию $f(t)$, обладающую таким свойством, называют неупреждающей (по отношению к $\omega(t)$).

При этом случайная последовательность $\int\limits_0^T f_n(t)\,d\omega(t)$ сходится по вероятности к некоторому пределу, не зависящему от выбора последовательности $f_n(t)$. Этот предел иногда обозначается через (2) *) и называется стохастическим интегралом Ито.

В дальнейшем используются следующие свойства интеграла Ито:

$$\mathrm{M}\int\limits_0^T f(t)\,d\omega(t)=0, \tag{1.4.4}$$

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_0^T f(t)\,d\omega(t)\right]^2=\int\limits_0^T \mathrm{M}f^2(t)\,dt. \tag{1.4.5}$$

Эти соотношения имеют место, если

$$\int\limits_0^T \mathrm{M}f^2(t)\,dt<\infty. \tag{1.4.6}$$

В справедливости (4), (5) нетрудно убедиться, если ограничиться ступенчатыми функциями. Тогда из (3), учитывая независимость $f(t_k)$ и $\omega(t_{k+1})-\omega(t_k)$, в результате непосредственных вычислений получаем (4), (5). Эти равенства справедливы и для произвольных функций $f(t)\in L_2[0,\ T]$, если только выполняется условие (6).

Рассмотрим простой пример, когда $f(t)=\omega(t)$. Прежде чем вычислять стохастический интеграл, установим одно интересное свойство винеровского процесса.

Пусть $t<T$, $t=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ — произвольное разбиение отрезка $[t,\ T]$; обозначим $\Delta=\max(t_{k+1}-t_k)$. Тогда при $n\to\infty$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\omega(t_{k+1})-\omega(t_k)]^2=T-t \tag{1.4.7}$$

(сходимость по вероятности). Докажем это.

Учитывая, что приращение $[\omega(t+s)-\omega(t)]$ — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией s, вычислим моменты

$$\mathrm{M}[\omega(t+s)-\omega(t)]^{2n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2n}\exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)dx=(2n-1)!!\,s^n$$

(n — целое число). В частности, при $n=1$ и $n=2$ имеем

$$\mathrm{M}[\omega(t+s)-\omega(t)]^2=s,\qquad \mathrm{M}[\omega(t+s)-\omega(t)]^4=3s^2. \tag{1.4.8}$$

Рассмотрим теперь случайную величину

$$\eta_n=\sum_{k=0}^{n-1}[\omega(t_{k+1})-\omega(t_k)]^2.$$

Используя (8), получаем

$$\mathrm{M}\eta_n=\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)=T-t. \tag{1.4.9}$$

---

*) Впоследствии используется другое обозначение (см. сноску на с. 36).

Поскольку величины $[\omega(t_{k+1})-\omega(t_k)]^2$ независимы, то

$$D\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} D\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2.$$

Далее, учитывая неравенство

$$D\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2 \leqslant M\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^4 = 3\,(t_{k+1} - t_k)^2,$$

имеем

$$D\eta_n \leqslant 3 \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \leqslant 3 \max (t_{k+1} - t_k) \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = 3\Delta\,(T - t).$$

Таким образом, $D\eta_n \to 0$ при $\Delta \to 0$ и, следовательно, из неравенства Чебышева и соотношения (9) вытекает свойство (7).

Перейдем теперь к вычислению $\int\limits_t^T \omega(t)\,d\omega(t)$. Согласно определению стохастического интеграла Ито

$$\int\limits_t^T \omega(t)\,d\omega(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(t_k)\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]$$

$$(t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T).$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(t_k)\,[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Big\{ \omega^2(t_{k+1}) - \omega^2(t_k) - [\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2 \Big\} = \frac{1}{2}\,[\omega^2(T) - \omega^2(t)] - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2.$$

Поэтому

$$\int\limits_t^T \omega(t)\,d\omega(t) = \frac{1}{2}\,[\omega^2(T) - \omega^2(t)] - \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2.$$

Используя (7), получаем

$$\int\limits_t^T \omega(t)\,d\omega(t) = \frac{1}{2}\,[\omega^2(T) - \omega^2(t)] - \frac{1}{2}\,(T - t). \qquad (1.4.10)$$

На этом примере видно, что для стохастического интеграла Ито несправедливы обычные правила интегрирования. Действительно, если под $\omega(t)$ понимать дифференцируемую в обычном смысле функцию, то

$$\int\limits_t^T \omega(t)\,d\omega(t) = \frac{1}{2}\,[\omega^2(T) - \omega^2(t)]. \qquad (1.4.11)$$

Отличие результатов интегрирования в этих двух случаях определяется, очевидно, особым свойством (7) винеровского процесса, недифференцируемого в обычном смысле.

Свойство (7) символически можно записать в виде

$$(\Delta\omega)^2 \sim \Delta t. \tag{1.4.12}$$

В то же время для дифференцируемой функции $\omega(t)$ квадрат ее приращения имеет порядок малости квадрата приращения аргумента:

$$(\Delta\omega)^2 \sim (\Delta t)^2, \tag{1.4.13}$$

и поэтому данный член исчезает при обычном интегрировании. Однако в исчислении Ито соответствующий член дает определенный вклад, в силу (7), (12).

1.4.2. Процессы Ито и процессы диффузионного типа. Непрерывный случайный процесс $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ называется процессом Ито, если существуют такие неупреждающие*) случайные процессы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, что с вероятностью 1

$$\int_0^T |\alpha(s)|\, ds < \infty, \qquad \int_0^T \beta^2(s)\, ds < \infty \tag{1.4.14}$$

и для каждого $t \in [0, T]$ с вероятностью 1

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \alpha(s)\, ds + \int_0^t \beta(s)\, d\omega(s), \tag{1.4.15}$$

где $\xi(0)$ — независимая от винеровского процесса $\omega(t)$ случайная величина (начальное условие), $\mathbf{M}\xi^2(0) < \infty$, а стохастический интеграл понимается в смысле Ито. При этом процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi(t) = \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, d\omega(t). \tag{1.4.16}$$

Процессы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ называются соответственно коэффициентом переноса и коэффициентом диффузии процесса Ито.

Менее общим классом случайных процессов являются процессы диффузионного типа [68] и диффузионные марковские процессы.

Непрерывный случайный процесс $\{\xi_t,\ t \geqslant 0\}$ называется процессом диффузионного типа, если существуют такие неупреждающие процессы $\varkappa(H_t, t)$ и $\gamma(H_t, t)$, $H_t = \{\xi^t_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, что с вероятностью 1

$$\int_0^T |\varkappa(H_s, s)|\, ds < \infty, \qquad \int_0^T \gamma^2(H_s, s)\, ds < \infty$$

и для каждого $t \in [0, T]$ с вероятностью 1

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \varkappa(H_s, s)\, ds + \int_0^t \gamma(H_s, s)\, d\omega(s), \tag{1.4.17}$$

где $\xi(0)$ — начальное условие, а стохастический интеграл понимается в смысле Ито.

Интегральное соотношение (16) эквивалентно стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = \varkappa(\xi_0^t, t)\, dt + \gamma(\xi_0^t, t)\, d\omega(t). \tag{1.4.17'}$$

Функционалы $\varkappa(H_t, t)$ и $\gamma(H_t, t)$ называются соответственно коэффициентами переноса и диффузии процесса диффузионного типа.

---

*) См. предыдущий пункт.

Отметим, что процесс диффузионного типа (17) переходит в диффузионный марковский процесс (1.2.44), если его коэффициенты переноса и диффузии $\varkappa(H_t, t)$, $\gamma(H_t, t)$ в момент времени t определяются только текущими значениями процесса $\xi_t \equiv \xi(t)$ (а не всей траекторией $\xi^t{}_0$), т. е. если

$$\varkappa(H_t, t) = a(\xi(t), t), \; \gamma(H_t, t) = \sigma(\xi(t), t),$$

где $a(\xi, t)$, $\sigma^2(\xi, t)$ — коэффициенты переноса и диффузии марковского диффузионного процесса.

В общем же случае процесс диффузионного типа и тем более процесс Ито являются немарковскими случайными процессами.

1.4.3. Формула дифференцирования. Остановимся на том, как вычисляется стохастический дифференциал сложной функции.

Если $\xi(t)$ — решение обыкновенного (не стохастического) дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t), t)\,dt,$$

а $\Phi(x, t)$ — некоторая достаточно гладкая функция, то дифференциал $d\Phi(\xi(t), t)$ согласно обычному правилу

$$d\Phi(\xi(t), t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\xi(t), t)\,d\xi(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\xi(t), t)\,dt \tag{1.4.18}$$

имеет вид

$$d\Phi(\xi(t), t) = \left[a(\xi(t), t)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\xi(t), t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\xi(t), t)\right]dt. \tag{1.4.19}$$

Однако, если $\xi(t)$ — решение стохастического уравнения (16) (или решение более частных стохастических уравнений (17), (1.2.49)), то формула (18) будет уже неприменима. Очевидно, должен появиться дополнительный член (как и при интегрировании) в силу особых свойств винеровского процесса.

Итак, пусть процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал (16), а функция $\Phi(x, t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x, t)$. Тогда процесс $\Phi(\xi(t), t)$ имеет стохастический дифференциал вида [44,30]

$$d\Phi(\xi(t), t) = \left[\alpha(t)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\xi(t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\xi(t), t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\beta^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(\xi(t), t)\right]dt + \beta(t)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(\xi(t), t)\,d\omega(t). \tag{1.4.20}$$

Это соотношение называется формулой дифференцирования Ито. Наличие в (20) дополнительного члена

$$\frac{1}{2}\beta^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(\xi(t), t)\,dt$$

обязано свойству (7). Отметим, также, что в случае $\beta(t) = 0$ формула (20) переходит, конечно, в (19) (при $\alpha(t) = a(\xi(t), t)$).

1.4.4. Минимальное представление. Обратим внимание на то, что коэффициенты переноса $\varkappa(\xi^t{}_0, t)$ и диффузии $\gamma(\xi^t{}_0, t)$ процесса диффузионного типа (см. (17′)) хотя и являются случайными, однако могут

быть вычислены, если задана реализация ξ^t_0 процесса $\{\xi_t\}$. Поэтому их можно считать условно известными. В то же время аналогичные коэффициенты процесса Ито — случайные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — нельзя определить на основе известной реализации процесса (15). Таким образом, существенное отличие процесса диффузионного типа от процесса Ито заключается в более простой (с вычислительной точки зрения) конструкции коэффициентов переноса и диффузии. В связи с этим возникает вопрос о возможности представления процесса Ито в виде процесса диффузионного типа. Данный вопрос изучался в [149, 156, 68, 41].

Пусть $\{\xi(t),\ t\geqslant 0\}$ является процессом Ито с дифференциалом

$$d\xi(t)=\alpha(t)\,dt+\sigma d\omega(t),\quad \sigma>0,\quad \xi(0)=0. \tag{1.4.21}$$

Тогда при условии

$$\mathrm{M}\,|\alpha(t)|<\infty,\quad \int\limits_0^t \mathrm{M}\alpha^2(s)\,ds<\infty,\quad t\in[0,\ T] \tag{1.4.22}$$

процесс $\xi(t)$ допускает представление

$$d\xi(t)=\widehat{\alpha}_t dt+\sigma d\widetilde{\omega}(t), \tag{1.4.23}$$

где

$$\widehat{\alpha}_t=\mathrm{M}\,[\alpha(t)\,|\,\xi_0{}^t], \tag{1.4.24}$$

а $\widetilde{\omega}(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Представление процесса Ито (21) в виде процесса диффузионного типа (23), где коэффициент переноса (24) определяется только прошлыми и настоящими значениями $\xi_0{}^t$, называется минимальным. Докажем справедливость минимального представления процесса Ито.

Образуем процесс

$$\chi(t)=\xi(t)-\int\limits_0^t \widehat{\alpha}_s ds. \tag{1.4.25}$$

Так как согласно (22) $\mathrm{M}|\alpha_t|<\infty$, то и $\widehat{\alpha}_t=\mathrm{M}[\alpha_t|\xi^t{}_0]<\infty$, $(t\in[0,\ T])$ и, следовательно, интеграл в (25) является непрерывным по верхнему пределу. Кроме того, процесс Ито $\xi(t)$ — непрерывный. Отсюда следует, что процесс $\chi(t)$ также непрерывен.

Вычислим теперь основные статистические характеристики приращений процесса $\chi(t)$: условные математическое ожидание и дисперсию. Из (21), (25) вытекает, что

$$\mathrm{M}\,[\chi(t)-\chi(u)\,|\,\xi_0{}^u]=$$
$$=\sigma\mathrm{M}\,[\omega(t)-\omega(u)\,|\,\xi_0{}^u]+\mathrm{M}\left\{\int\limits_u^t[\alpha(s)-\widehat{\alpha}_s]\,ds\,|\,\xi_0{}^u\right\},$$

где $u\leqslant s\leqslant t$, $\xi^u{}_0$ — реализация процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0,\ u]$. В силу свойств винеровского процесса $\mathrm{M}[\omega(t)-\omega(u)|\xi^u{}_0]=0$. Для второго слагаемого с учетом свойства условного математического ожидания

$$\mathrm{M}\,[\widehat{\alpha}_s\,|\,\xi_0{}^u]=\mathrm{M}\,\{\mathrm{M}\,[\alpha(s)\,|\,\xi_0{}^s]\,|\,\xi^u{}_0\}=\mathrm{M}\,[\alpha(s)\,|\,\xi_0{}^u],\quad s\geqslant u,$$

получаем

$$\mathrm{M}\left\{\int\limits_u^t[\alpha(s)-\widehat{\alpha}_s]\,ds\,|\,\xi_0{}^u\right\}=0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}[\chi(t)-\chi(u)\,|\,\xi^u{}_0]=0.$$

Отсюда следует, что процесс $\chi(t)$ — мартингал, так как

$$\mathbf{M}\,[\chi(t)\,|\,\chi(s),\; s\leqslant u<t]=\mathbf{M}\,[\chi(t)\,|\,\xi_0{}^u]=\mathbf{M}\,[\chi(u)\,|\,\xi_0{}^u]=\chi(u)$$

Определим теперь условную дисперсию

$$M\,\{[\chi(t)-\chi(u)]^2\,|\,\xi_0{}^u\}=\mathbf{M}\,[\chi^2(t)-\chi^2(u)\,|\,\xi_0{}^u].$$

Используя формулу Ито (20) с учетом (21) и (25), имеем

$$\chi^2(t)-\chi^2(u)=$$

$$=2\int\limits_u^t\chi(s)\,[\alpha(s)-\widehat{\alpha}_s]\,ds+2\sigma\int\limits_u^t\chi(s)\,d\omega(s)+\sigma^2(t-u).$$

Отсюда

$$\mathbf{M}\,[\chi^2(t)-\chi^2(u)\,|\,\xi_0{}^u]=$$

$$=2\mathbf{M}\left\{\int\limits_u^t\chi(s)\,[\alpha(s)-\widehat{\alpha}_s]\,ds\,|\,\xi_0{}^u\right\}+2\sigma\mathbf{M}\left\{\int\limits_u^t\chi(s)\,d\omega(s)\,|\,\xi_0{}^u\right\}+\sigma^2(t-u). \quad (1.4.26)$$

Из условия (22) следует, что $\int\limits_0^t M\chi^2(s)\,ds<\infty,\; t\in[0,\,T]$. Это позволяет использовать свойство стохастического интеграла Ито, в силу которого второй член в правой части (26) равен нулю. Первый член также равен нулю, поскольку

$$\mathbf{M}\,[\chi(s)\,\alpha(s)\,|\,\xi_0{}^u,\; s>u]=\mathbf{M}\,\{\chi(s)\,\mathbf{M}\,[\alpha(s)\,|\,\xi_0{}^s]\,|\,\xi_0{}^u,\quad s>u\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}[\chi^2(t)-\chi^2(u)\,|\,\xi^u{}_0]=\sigma^2(t-u). \quad (1.4.27)$$

Теперь воспользуемся свойством непрерывного мартингала [38, с. 345]: мартингал с непрерывными траекториями и ограниченной вариацией, удовлетворяющий условию (27), является процессом с независимыми приращениями, причем имеющим гауссовское распределение. Таким образом, $\chi(t)$ — винеровский процесс с $\mathbf{D}\chi(t)=\sigma^2 t$. Поэтому $\widetilde{\omega}(t)=(1/\sigma)\chi(t)$ — стандартный винеровский процесс; в результате из (25) получаем представление (23), что и требовалось доказать.

1.5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ КАК МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

1.5.1. Общая характеристика проблемы. Физическая природа реальных сигналов и помех может быть различной: радиоволны в радиолокации, радиосвязи, радиоастрономии, приводящие к возникновению электрических сигналов в радиоприемных системах; дробовой эффект в электронных приборах и тепловое движение заряженных частиц в электрических цепях, обусловливающие собственный шум радиотехнических устройств; световые волны в астрономии и лазерной локации; акустические колебания в гидролокации; сейсмические волны в сейсмологии и др. Однако несмотря на разнообразие сигналов (помех) существует класс математических моделей, охватывающий главные и общие свойства реальных процессов, пригодный для описания сигналов различной природы. Такой класс составляют случайные процессы.

То, что сигналы, действительно, носят стохастический характер, объясняется рядом причин. Так, например, в радиолокации этому спо-

собствуют флюктуации эффективной отражающей поверхности объекта, обусловленные изменением его ракурса и вибрацией поверхности. При прохождении электромагнитных волн через турбулентную атмосферу и ионосферу, коэффициенты преломления и поглощения которых меняются неконтролируемым образом, возникают случайные изменения в сигнале. В пассивной гидролокации сигнал представляет собой флюктуационные колебания — акустический шум, вызванный работой машин и винтов корабля. Сейсмические сигналы при распространении в земле претерпевают флюктуационные искажения вследствие рассеивания, реверберации и др.

Что касается помех (шумов), то их флюктуационный характер более очевиден. Собственный шум радиотехнических устройств, внешние помехи радиоприему (индустриальные, атмосферные, космические), пассивные (отражения от местных предметов и др.) и некоторые активные (специально организованные) помехи в радиолокации, акустические и сейсмические шумы — все эти помехи обусловлены множеством неконтролируемых причин и вследствие этого являются случайными.

Необходимо также отметить, что стохастические модели включают в себя в качестве вырожденных частных случаев и более простые — детерминированные (полностью известные), и квазидетерминированные модели (подробнее см. в п. 1.5.5).

При теоретическом исследовании задач обнаружения и выделения сигналов возникают естественные вопросы: (1) какие из известных случайных процессов целесообразно использовать в качестве моделей сигналов и помех и (2) насколько адэкватна та или иная модель реальным процессам.

Ответ на второй вопрос можно получить в результате экспериментального определения характеристик реального процесса и сравнения их с характеристиками выбранной модели. В ряде случаев о соответствии моделей реальным процессам можно судить и по результатам теоретических исследований, изучая физическую природу сигналов и их математическое описание.

Ответ на первый вопрос зависит, очевидно, от ответа на второй, но и не только от него. При выборе моделей необходимо учитывать также и возможность эффективного проведения математических исследований с ними. Могут быть модели, хорошо аппроксимирующие реальные процессы, но являющиеся мало полезными из-за чрезмерной сложности (а иногда даже невозможности) аналитических исследований. Здесь нужно искать приемлемое компромиссное решение, что само по себе является довольно трудной задачей.

Остановимся теперь на тех моделях, которые используются для описания сигналов и помех в данной книге.

Одной из них является гауссовский случайный процесс. Эта традиционная модель получила широкое распространение в задачах обработки сигналов, что вызвано, с одной стороны, хорошей аппроксимацией ряда сигналов и помех гауссовским процессом (в силу известного явления нормализации, объясняемого центральной предельной теоремой [71]), с другой — удобством математического исследования.

Однако гауссовская модель не всегда бывает удовлетворительна. Помехи (как искусственного, так и естественного происхождения) нередко описываются существенно негауссовским распределением вероятностей: атмосферные и индустриальные помехи, активные помехи, получающиеся в результате модуляции параметров высокочастотного

колебания шумовым напряжением, импульсные помехи и т. д. Для полезного сигнала негауссовская модель часто также является необходимой: различного рода случайно модулированные радиосигналы, сигнал, отраженный от объекта с нестабилизированным вращением, и др. Причем по мере развития техники негауссовские модели приобретают все большее значение и иногда вытесняют прежние, гауссовские модели. Так произошло, например, с моделями пассивных помех, создаваемых морской поверхностью радиолокаторам с высокой разрешающей способностью. Эти обстоятельства заставляют использовать в задачах приема сигналов и негауссовские модели. «Гауссовский барьер» эффективно преодолевается с использованием марковских моделей.

Марковские процессы являются наиболее широким и в то же время гибким (в смысле возможностей математического исследования) классом случайных процессов. Они могут быть однокомпонентными и многокомпонентными, протекать в дискретном и непрерывном времени, с дискретным и непрерывным фазовым пространством (см. § 1.2). В класс марковских моделей входят гауссовские (марковские) и негауссовские, коррелированные и как частный случай некоррелированные, непрерывные и импульсные сигналы и помехи. В качестве вырожденных случаев сюда же входят квазидетерминированные процессы. Важными обстоятельствами являются сходимость при определенных условиях [121, 29] немарковского процесса к марковскому и возможность аппроксимации реальных процессов марковскими. В силу указанных причин задачам обнаружения и выделения сигналов при марковских моделях будет уделено наибольшее внимание.

В качестве модели наблюдаемого процесса будет использован и процесс Ито. Случайный процесс $\alpha(t)$ — коэффициент переноса процесса Ито (см. п. 1.4.2) — нами применяется в качестве наиболее общей модели сигнала (или помехи) и будет именоваться произвольным сигналом (помехой). Действительно, условие (1.4.14) (или даже типа (1.4.6)), которому должен удовлетворять этот процесс, по существу не является ограничением на реальные процессы, всегда обладающие конечной энергией.

Кроме указанных процессов, в качестве модели сигнала будем использовать и довольно общий класс случайных процессов, строящихся на основе мартингалов и называемых квазимартингалами [152]. К этому классу относятся случайные процессы, которые можно представить в виде суммы непрерывного мартингала и процесса с ограниченной вариацией (см. § 7.3). Квазимартингалы включают в себя, в частности, марковские диффузионные, а также немарковские процессы — процессы диффузионного типа, процессы Ито.

1.5.2. Белый шум. Остановимся подробнее на одной из наиболее распространенных моделей помех — белом шуме. Под белым гауссовским шумом обычно понимают гауссовский процесс $\xi_0(t)$, для которого

$$\mathbf{M}\xi_0(t) = 0, \quad K(\tau) = \mathbf{M}\xi_0(t+\tau)\,\xi_0(t) = N\delta(\tau), \tag{1.5.1}$$

где N — некоторая константа (в более общем случае N может быть функцией времени). Интеграл от этого дельта-коррелированного процесса является винеровским процессом (см. (1.2.41)) с $\mathbf{D}\omega(t) = Nt$. Спектральная плотность белого шума

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-i\omega\tau)\, d\tau = N. \tag{1.5.2}$$

Таким образом, график спектральной плотности белого шума представляет собой неограниченную прямую, параллельную оси частот.

На первый взгляд, может показаться, что модель дельта-коррелированного процесса из-за ее экзотического свойства (1.2.46) бесполезна для описания какого-либо реального шума, мощность которого всегда конечна. Однако это не так.

Белый шум является примером удачного компромиссного решения при выборе математической модели. С одной стороны, белый шум хорошо аппроксимирует, например, собственные шумы радиоприемного устройства поскольку для них имеет место эффект нормализации и ширина спектра шумов обычно намного больше полосы пропускания устройства. С другой стороны, белый шум удобен при математических исследованиях, в частности, из-за простоты вычисления интегралов с дельта-функцией.

Отметим, что введение ограниченного по полосе «белого» шума несколько улучшило бы модель в смысле аппроксимации реального шума, но эффективность математического исследования при этом резко ухудшается.

Однако все же имеется возможность приблизиться к более реальной постановке задачи, оставаясь в рамках прежней модели. Причем это относится не только к белому шуму, но и к более общим моделям. Рассмотрим эту возможность в следующем пункте.

1.5.3. Симметризованная запись стохастических интегралов и уравнений. Винеровский процесс и строящиеся на его основе диффузионные марковские процессы, процессы диффузионного типа и процессы Ито недифференцируемы в обычном смысле. Чтобы придать строгий смысл дифференциальным уравнениям, описывающим диффузионные процессы, потребовалось прибегать к специальным интегралу и дифференциалу — стохастическим интегралу и дифференциалу Ито. Однако характер диффузионных процессов как моделей сигналов и помех от этого нисколько не изменился: их траектории весьма изрезаны; негладкие. Реальные же процессы являются гладкими.

Продвинуться по пути приближения к практическим задачам все же удается, если воспользоваться симметризованной формой записи стохастических интегралов и уравнений, предложенной Стратоновичем [120, 121].

Поступая аналогично [121, 143], введем симметризованный стохастический интеграл следующим образом. Пусть $\xi(t)$ и $y(t)$ — случайные процессы, имеющие за время Δt приращение порядка $\sqrt{\Delta t}$, т. е. обладающие свойством (1.4.12). Предположим, что процесс $\xi(t)$ не зависит от будущего процесса $y(t)$ и

$$\int_0^T M\Phi^2(\xi(t),\ t)\,dt < \infty, \tag{1.5.3}$$

где функция $\Phi(\xi, t)$ дифференцируема по ξ и непрерывна по t. При этом симметризованный стохастический интеграл определяется как предел в среднеквадратическом сумм:

$$\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\,dy(t) = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\{\Phi(\xi(t_k),\ t_k) + \Phi(\xi(t_{k+1}),\ t_{k+1})\}[y(t_{k+1}) - y(t_k)], \tag{1.5.4}$$

где $\Delta = \max(t_{k+1} - t_k)$.

Определим теперь для рассматриваемого случая стохастический интеграл в смысле Ито как предел в среднеквадратическом сумм, составленных аналогично (1.4.3) *)

$$\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\, d^*y(t) = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\xi(t_k),\ t_k)\,[y(t_{k+1}) - y(t_k)]. \qquad (1.5.5)$$

В том случае, когда $y(t)$ — винеровский процесс, введенный стохастический интеграл в смысле Ито совпадает со стохастическим интегралом Ито, рассмотренным в п. 1.4.1, поскольку $\Phi(\xi(t),\ t) \in L_2\ [0,\ T]$.

Для выявления связи между введенными стохастическими интегралами представим (4), учитывая (5), в виде

$$\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\, dy(t) = \int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\, d^*y(t) +$$

$$+ \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [\Phi(\xi(t_{k+1}),\ t_{k+1}) - \Phi(\xi(t_k),\ t_k)]\,[y(t_{k+1}) - y(t_k)]. \qquad (1.5.6)$$

Если для процессов $\xi(t)$ и $y(t)$, имеющих приращение $\sqrt{\Delta t}$ за время Δ

$$M\{d^*\xi(t)\, d^*y(t) | \xi(t) = \xi,\ y(t) = y\} = b(\xi,\ y,\ t)\, dt,$$

где коэффициент диффузии $b(\xi,\ y,\ t)$ — непрерывная функция времени, то из (6) следует

$$\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\, dy(t) = \int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\, d^*y(t) + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi(t),\ t)\, b(\xi,\ y,\ t)\, dt. \qquad (1.5.7)$$

Таким образом, симметризованный стохастический интеграл (4) отличается от стохастического интеграла в смысле Ито (5) на величину, равную обыкновенному интегралу $\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\, b dt$.

Рассмотрим пример. Пусть $y(t) = \omega(t)$, $\Phi(\xi(t),\ t) = \omega(t)$, где $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс ($b = 1$). Вычисляя симметризованный стохастический интеграл $\int_t^T \omega(t)\, d\omega(t)$, согласно (7) имеем

$$\int_t^T \omega(t)\, d\omega(t) = \int_t^T \omega(t)\, d^*\omega(t) + \frac{1}{2}(T - t).$$

Подставляя сюда вычисленное ранее значение стохастического интеграла Ито (1.4.10), получим

$$\int_t^T \omega(t)\, d\omega(t) = \frac{1}{2}[\omega^2(T) - \omega^2(t)].$$

---

*) Чтобы не спутать стохастические интегралы и дифференциальные уравнения Ито с симметризованными, начиная с этого момента, первые будем обозначать, используя знак *. При совпадении обеих форм записи знак * опускается.

Таким образом, симметризованный стохастический интеграл приводит к результату (1.4.11), который согласуется с обычными правилами интегрирования, как если бы процесс $\omega(t)$ был дифференцируемой функцией.

Приведенные здесь определения стохастических интегралов и связывающая их формула допускают прямое обобщение на многомерный случай, когда $\Phi(\xi, t)$ есть дифференцируемая функция случайных компонент $\{\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)\}=\xi(t)$, не зависящих от будущего процесса $\mathbf{y}(t)=\{y_1(t), \ldots, y_l(t)\}$, для которых

$$\mathrm{M}\{d^*\xi_i(t)\,d^*y_j(t)\,|\,\xi(t)=\xi,\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{y}\}=b_{ij}(\xi,\ \mathbf{y},\ t)\,dt,$$
$$i=1, \ldots, m; \qquad j=1, \ldots, l. \tag{1.5.8}$$

Формула связи (7) при этом приобретает вид:

$$\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\,dy_j(t)=\int_0^T \Phi(\xi(t),\ t)\,d^*y_j(t)+\frac{1}{2}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^m \int_0^T \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}(\xi(t),\ t)\,b_{ij}(\xi,\ \mathbf{y},\ t)\,dt. \tag{1.5.9}$$

Обратимся теперь к стохастическим дифференциальным уравнениям, которые, как и стохастические интегралы, могут определяться по-разному. Если $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$ — коэффициенты переноса и диффузии диффузионного марковского процесса $\xi(t)$, то стохастическое дифференциальное уравнение Ито, описывающее процесс $\xi(t)$, имеет вид (1.2.42). Записывая это уравнение в интегральной форме, имеем (1.2.44):

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t a(\xi(\tau),\ \tau)\,d\tau+\int_0^t \sqrt{b(\xi(\tau),\ \tau)}\,d^*\omega(\tau).$$

Используя формулу связи (7), перейдем к симметризованному уравнению. В рассматриваемом случае $\Phi(\xi(t),\ t)=\sqrt{b(\xi(t), t)}$, а $b(\xi,\ y,\ t)=\sqrt{b(\xi, t)}$, поэтому

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t a(\xi(\tau),\ \tau)\,d\tau+\int_0^t \sqrt{b(\xi(\tau), \tau)}\,d\omega(\tau)-\frac{1}{4}\int_0^t \frac{\partial b(\xi,\ t)}{\partial\xi}\,d\tau.$$

Отсюда получаем симметризованное дифференциальное уравнение

$$d\xi(t)=\left[a(\xi(t),\ t)-\frac{1}{4}\,\frac{\partial b(\xi(t),\ t)}{\partial\xi}\right]dt+\sqrt{b(\xi(t), t)}\,d\omega(t). \tag{1.5.10}$$

В том случае, когда диффузионный марковский процесс является однородным по фазовому пространству, т. е. когда $b(\xi, t)=b(t)$ (см. п. 1.2.5), уравнение Ито (1.2.42) и симметризованное уравнение (10) по форме совпадают.

Аналогичным образом, используя (9), перейдем от системы уравнений Ито (1.2.55) к системе симметризованных уравнений, описывающих многомерный диффузионный марковский процесс

$$d\xi_i(t)=\left[a_i(\xi(t),\ t)-\frac{1}{2}\sum_{k,\ j=1}^m \frac{\partial\sigma_{ij}(\xi(t), t)}{\partial\xi_k}\,\sigma_{kj}(\xi(t),\ t)\right]dt+$$
$$+\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(\xi(t),\ t)\,d\omega_j(t). \tag{1.5.11}$$

Симметризованные стохастический интеграл и дифференциальное уравнение обладают важным свойством: для них справедливы обычные правила интегрирования и дифференцирования. Стохастические интеграл и уравнение Ито этим свойством не обладают. Благодаря использованию симметризованной формы записи стохастических выражений недифференцируемые случайные процессы как бы приобрели свойства гладких моделей, в частности, свойство (1.4.13). Указанные обстоятельства заставляют в задачах обнаружения и выделения сигналов на фоне помех отдавать предпочтение симметризованной форме записи стохастических выражений перед формой Ито.

Однако последнюю форму записи мы не исключаем совсем из дальнейшего рассмотрения. Это сделано в целях большего охвата теоретических задач, а также в связи с тем, что запись стохастических выражений в форме Ито короче и, кроме того, они обладают рядом свойств (в частности, (1.4.4), (1.4.5)), которые облегчают анализ алгоритмов обработки сигналов.

1.5.4. Аппроксимация немарковских процессов марковскими. Рассмотренная симметризованная форма записи стохастических уравнений позволяет с бóльшим основанием (чем форма Ито) использовать недифференцируемые процессы, в частности, диффузионные марковские, в качестве моделей дифференцируемых сигналов и помех. Однако можно пойти и дальше по пути замены немарковских моделей марковскими.

Рассмотрим вначале случай дискретного времени. Пусть $\{\xi(t_i),\ i=1, 2, \ldots\}$ — случайная последовательность, для которой

$$P\{\xi(t_i)<x_i\,|\,\xi(t_{i-1})=x_{i-1}, \ldots, \xi(t_1)=x_1\}=$$
$$=P\{\xi(t_i)<x_i\,|\,\xi(t_{i-1})=x_{i-1}, \ldots, \xi(t_{i-m})=x_{i-m}\}$$

при любых $x_i \in X$ и i,

$$m<\infty. \qquad (1.5.12)$$

В этом случае процесс $\{\xi(t_i)\}$ является сложным (m-связным) марковским. Образуя векторный процесс типа (1.2.58), можно заменить исходный процесс компонентой m-мерного простого марковского процесса. При этом указанная замена является точной.

Если условие (12) не выполняется, то для точной замены исходного процесса компонентой марковского потребовалось бы ввести бесконечносвязный и соответствующий ему бесконечномерный марковские процессы. Однако для решения практических задач этого делать не нужно. Дело в том, что «память» реальных случайных последовательностей сигналов и помех практически всегда конечна. Кроме того, обрабатывая наблюдаемые сигналы, статистик располагает лишь конечным временем наблюдения. В силу этого условие (12) в практических задачах выполняется всегда и поэтому последовательность сигналов и помех допускает исчерпывающее описание в рамках m-мерных марковских процессов.

Необходимо отметить, что повышение степени связности (m) марковского процесса усложняет модели сигналов и помех, что влечет за собой усложнение синтезируемых алгоритмов обработки сигналов. Поэтому представляет интерес задача выбора в качестве моделей сигнала (и помех) сложных марковских процессов наименьшей связности. Данную задачу можно сформулировать, например, так.

Пусть $\{\xi(t_i),\ i=1, 2, \ldots\}$ — m-связный марковский процесс и пусть задано число $\delta>0$. Требуется построить k-связный марковский процесс

$\{\tilde{\xi}(t_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ минимальной степени связности $k \leqslant m$, такой что с вероятностью 1

$$|P\{\xi(t_i) < x \mid \xi(t_{i-1}), \ldots, \xi(t_{i-m})\} - P\{\tilde{\xi}(t_i) < x \mid \tilde{\xi}(t_{i-1}), \ldots, \tilde{\xi}(t_{i-k})\}| < \delta \qquad (1.5.13)$$

при любых $x \in X$. Очевидно, что k зависит от заданного δ, от m и от распределения вероятностей F_ξ процесса $\xi(t_i)$: $k=k(\delta,\ m,\ F_\xi)$. Таким образом, для решения задачи аппроксимации сигналов марковскими процессами минимальной связности необходимо конкретизировать распределения сигналов и задаться допустимой погрешностью δ.

Аппроксимирующий марковский процесс минимальной связности можно выбирать и по-другому, например, из условия, что «информационное расстояние» [59, 142] между распределениями искомого процесса и аппроксимирующего не превосходит заданной величины.

Далее, критерий аппроксимации может определяться также допустимой потерей качества обнаружения или оценивания сигналов. Этот критерий, в отличие от предыдущих, связан с алгоритмами обработки сигналов, при этом задача аппроксимации усложнится.

Обратимся теперь к случаю непрерывного времени. Пусть $\{\xi(t)\}$ — случайный процесс, получающийся на выходе динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением m-го порядка общего вида, на вход которой воздействует белый шум $\xi_0(t)$. Это означает, что $\xi(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d^m\xi(t)}{dt^m} = F\left(t,\ \xi_0(t),\ \frac{d\xi(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}\xi(t)}{dt^{m-1}}\right). \qquad (1.5.14)$$

Процесс $\xi(t)$ не является марковским. Однако он представляет собой компоненту m-мерного марковского процесса. Убедимся в этом.

Обозначив

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \xi_1(t), \qquad \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = \xi_2(t), \ \ldots, \ \frac{d^{m-1}\xi(t)}{dt^{m-1}} = \xi_{m-1}(t), \qquad (1.5.15)$$

сведем уравнение (14) к системе m уравнений первого порядка

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \xi_1(t), \qquad \frac{d\xi_1(t)}{dt} = \xi_2(t), \ldots,$$

$$\frac{d\xi_{m-2}(t)}{dt} = \xi_{m-1}(t),$$

$$\frac{d\xi_{m-1}(t)}{dt} = F\{t,\ \xi_0(t),\ \xi_1(t), \ldots,\ \xi_{m-1}(t)\}. \qquad (1.5.16)$$

Рассмотрим векторный случайный процесс $\boldsymbol{\xi}(t)=\{\xi(t),\ \xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t)\}$, при этом зафиксируем его значение $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ в некоторый момент τ. Из (16) следует, что траектории компонент $\xi(t),\ \xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t)$ при $t>\tau$ зависят от значений $\xi(\tau),\ \xi_1(\tau), \ldots, \xi_{m-1}(\tau)$ и от вероятностного поведения процесса $\xi_0(\tau)$. Но $\xi_0(\tau)$ — белый шум (имеет независимые значения). Поэтому вероятностное поведение процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t>\tau$ и фиксированном $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ не зависит от значения $\boldsymbol{\xi}(s)$ при $s<\tau$, т. е. процесс $\boldsymbol{\xi}(t)=\{\xi(t),\ \xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t)\}$ является m-мерным марковским.

В том частном случае, когда уравнение (14) является линейным, процесс $\xi(t)$ будет гауссовским, так как линейное преобразование бело-

го гауссовского шума $\xi_0(t)$ не меняет его распределения вероятностей. Гауссовскими будут и компоненты (15), при этом процесс $\xi(t)$ является компонентой m-мерного марковского гауссовского процесса $\xi(t)$.

Если процесс $\xi_0(t)$ (см. (14)) не является белым шумом, но может быть представлен как решение дифференциального уравнения k-го порядка, в правую часть которого входит белый шум, то задача сводится к уже рассмотренной. При этом процесс $\xi(t)$ можно представить как компоненту $(m+k)$-мерного марковского процесса.

Пусть теперь дифференцируемый любое число раз случайный процесс $\xi_0(t)$, имеющий конечное время корреляции $\tau_k>0$, нельзя представить в виде процесса, порожденного белым шумом. Тогда процесс $\xi(t)$, определяемый уравнением (14), не будет являться компонентой многомерного марковского процесса. Однако марковская аппроксимация все же возможна и в данном случае. Для этого выберем моменты времени t_i:

$$t_i-t_{i-1}\gg\tau_k, \quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{1.5.17}$$

так, чтобы случайные величины $\xi_0(t_i)$ можно было бы считать приближенно независимыми. Тогда из предыдущего рассмотрения следует, что векторный процесс $\{\xi(t_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ с дискретным временем, полученный из процесса $\xi(t)=\{\xi(t),\ \xi_1(t),\ \ldots,\ \xi_{m-1}(t)\}$ с непрерывным временем, является приближенно m-мерным марковским. Чем сильнее неравенства (17), тем точнее процесс $\{\xi(t_i)\}$ аппроксимируется марковским.

1.5.5. Детерминированные и квазидетерминированные модели. Среди математических моделей сигналов, используемых в технике, в частности в радиолокации и радиосвязи, важное место занимают процессы вида $S(\xi,\ t)$, представляющие собой детерминированную функцию S времени t и векторной случайной величины $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m)$, $m\geqslant1$. Такие процессы (сигналы) называются квазидетерминированными. Примером квазидетерминированного процесса является гармонический сигнал

$$S(A,\ \omega,\ \varphi,\ t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

со случайными амплитудой A, частотой ω и фазой φ. Квазидетерминированные модели соответствуют тому случаю, когда параметры сигнала не меняются на интервале наблюдения.

Очевидно, что квазидетерминированный процесс есть вырожденный частный случай более общей модели вида $S(\xi(t),\ t)$, где $\xi(t)$ — векторный случайный процесс. Последняя модель соответствует тому случаю, когда параметры сигнала меняются случайным образом на интервале наблюдения. Модели такого вида, как наиболее общие, и рассматриваются, главным образом, в данной книге. Однако от них всегда можно перейти к более простым моделям — квазидетерминированным. Особенно это удобно делать в том случае, когда параметр $\xi(t)$ сигнала $S(\xi(t),\ t)$ является марковским процессом. Действительно, пусть, например, параметр $\{\xi(t_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots\}$ сигнала $S(\xi(t_i),\ t_i)$ представляет собой марковский процесс с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством (см. п. 1.2.3), определяемый переходной плотностью вероятностей $\pi(x_{i+1}|x_i)$ и начальной плотностью $\pi(x_1)$. Если положить

$$\pi(x_{i+1}\mid x_i)=\delta(x_{i+1}-x_i), \quad i=1,\ 2, \ldots \tag{1.5.18}$$

(δ — дельта-функция), то сигнал $S(\xi(t_i),\ t_i)$, параметр которого являлся случайным процессом, перейдет в квазидетерминированный $S(\xi_1,\ t_i)$, где ξ_1 — случайная величина с плотностью вероятностей $\pi(x_1)$.

Рассматривая теперь вариант непрерывного времени, предположим, что параметр $\xi(t)$ сигнала $S(\xi(t), t)$ является марковским диффузионным процессом, определяемым стохастическим уравнением (1.2.42). Полагая в (1.2.42)

$$a(x, t) = b(x, t) = 0, \tag{1.5.19}$$

придем к вырожденному уравнению

$$d\xi(t) = 0, \tag{1.5.20}$$

решение которого совпадает с заданным начальным условием $\xi(t_1) = \xi_1$, являющимся случайной величиной. При этом стохастический сигнал $S(\xi(t), t)$ переходит в квазидетерминированный $S(\xi_1, t)$. В случае векторного диффузионного параметра $\boldsymbol{\xi}(t)$ для перехода к квазидетерминированной модели нужно положить

$$a_i(\mathbf{x}, t) = b_{ij}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Если и далее упрощать стохастическую модель, то, выбрав в качестве начального условия для (20) детерминированную (неслучайную) величину $\xi(t_1) = x^*_1$ (ее плотность вероятностей $\pi(x_1) = \delta(x_1 - x^*_1)$), придем к детерминированному или полностью известному сигналу $S(x^*_1, t) \equiv S^*(t)$, являющемуся неслучайной функцией времени.

Итак, используя общие стохастические модели, можно всегда перейти к более простым — квазидетерминированным и детерминированным.

Глава 2

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ

Основой для синтеза и анализа оптимальных алгоритмов обработки сигналов служит математическая статистика, изучающая статистические выводы относительно наблюдаемых реализаций случайного процесса. В данной главе рассматриваются основные положения математической статистики применительно к задачам обнаружения и оценивания сигналов, используемые в дальнейшем при построении и анализе конкретных алгоритмов.

2.1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

На развитие теории обнаружения и оценивания сигналов большое влияние оказала теория статистических решений Вальда [21], объединившая традиционные направления математической статистики — проверку гипотез и оценку параметров — на единой основе и давшая методы построения оптимальных решающих правил.

2.1.1. Основные понятия. Задача статистического решения возникает при наблюдении реализации y случайного процесса $\{y(t)\}$, проте-

кающего в дискретном либо в непрерывном времени. Пусть $\Gamma \ni y$ — пространство, на котором определены всевозможные реализации процесса $y(t)$, и пусть θ — некоторый параметр, принадлежащий заданной области Ω. Предполагается, что распределение вероятностей наблюдаемого процесса $\{y(t)\}$ зависит от параметра θ, значение которого неизвестно наблюдателю. Если наблюдается конечная последовательность случайных величин $\{y(t_i),\ i=1,\ \ldots,\ n\}$, то ее можно полностью описать при помощи n-мерной функции распределения вероятностей (см. (1.1.2)), зависящей от θ, обозначим эту функцию при данном значении θ через $F(y|\theta)$ (y здесь n-мерный вектор).

Применительно к задаче обнаружения параметр θ может принимать, например, два значения, которые ассоциируются с ситуациями наличия и отсутствия полезного сигнала в наблюдаемом процессе. В задаче оценивания θ может принимать, например, непрерывное множество значений, которые ассоциируются с самим сигналом (либо с параметрами сигнала). При этом наблюдаемый процесс $y(t)$ представляет собой некоторую смесь сигнала и помехи.

Обозначим через d элемент множества D решений, которые можно вынести относительно параметра θ по результатам наблюдения над $\{y(t)\}$, и пусть δ — решающая функция (или решающее правило), принадлежащая классу решающих функций Δ и отображающая множество Γ в D. Согласно этому решающему правилу каждой возможной реализации $y \in \Gamma$ ставится в соответствие определенное решение $d = \delta(y)$, $d \in D$.

В результате принятия тех или иных решений возможны ошибки. «Убыток», который несет при этом наблюдатель, можно охарактеризовать некоторой функцией $c(\theta,\ d)$, выбираемой из эвристических соображений. Эта функция, называемая функцией штрафа, или потерь, определяет величину потерь, возникающих вследствие принятия решения d при условии, что истинное значение параметра равно θ.

Функцию потерь можно использовать для сравнения решающих правил и выбора из них более предпочтительного. Поскольку решение $d=\delta(y)$ зависит от реализации случайного процесса, то функция потерь $c(\theta,\ \delta(y))$ является случайной и поэтому выбор решающих правил естественно производить на основании сравнения статистических характеристик функции потерь. В теории решений из таковых используется математическое ожидание функции потерь (но, вообще говоря, можно учитывать и другие характеристики).

Математическое ожидание функции потерь при известном значении θ

$$r(\theta,\ \delta) = M\,[c(\theta,\ \delta(y)\,|\,\theta) \tag{2.1.1}$$

называется функцией риска (иногда (1) называют условным риском). Функция риска зависит от принятого решающего правила δ и от распределения вероятностей $F(y|\theta)$

$$r(\theta,\ \delta) = \int\limits_{\Gamma} c(\theta,\ \delta(y))\,dF(y\,|\,\theta).$$

Если наблюдается последовательность непрерывных случайных величин $\{y_i\}$, то существует плотность вероятностей $p(y|\theta)$, при этом функцию риска можно представить в виде

$$r(\theta,\ \delta) = \int\limits_{\Gamma} c(\theta,\ \delta(y))\,p(y\,|\,\theta)\,dy. \tag{2.1.2}$$

Говорят, что решающая функция δ_1 равномерно лучше, чем δ_2, если справедливы неравенства: $r(\theta, \delta_1) \leqslant r(\theta, \delta_2)$ для всех $\theta \in \Omega$, и $r(\theta, \delta_1) < r(\theta, \delta_2)$ хотя бы для одного θ.

Решающая функция δ^* называется допустимой, если не существует в Δ другой решающей функции δ, которая была бы равномерно лучше δ^*. Класс Δ' решающих функций называется полным, если для любой $\delta \notin \Delta'$ найдется решающая функция $\delta^* \in \Delta'$, равномерно лучшая, чем δ. Полный класс Δ' называется минимальным, если он не содержит никакого собственного полного подкласса. Если минимальный полный класс существует, то он совпадает с классом всех допустимых решающих функций [21].

Отметим, что если класс Δ' решающих функций является полным, то выбор наиболее предпочтительной решающей функции, очевидно, достаточно производить лишь только в этом классе, не рассматривая функций $\delta \notin \Delta'$. Поэтому построение полных класов — важная задача теории решений. Один из способов построения полного класса решающих функций рассматривается в следующем пункте.

2.1.2. Байесовские решения и системы. Наиболее предпочтительным решающим правилом естественно было бы считать такое, которое минимизирует функцию риска (1) для всех значений θ. Однако такое правило существует лишь в редких случаях. Обычно решающая функция, минимизирующая (1), зависит от θ, и для разных значений θ она различна; при этом неясно, какую же решающую функцию считать наилучшей.

Указанную зависимость можно исключить, если использовать, например, байесовский подход к проблеме выбора решений. Суть этого подхода заключается в следующем.

Предполагается, что (1) параметр θ является случайной величиной, распределение вероятностей которого $F_0(\theta)$ существует; (2) распределение $F_0(\theta)$ (априорное распределение) известно наблюдателю.

Тогда можно определить средний риск, взяв повторное математическое ожидание от функции риска (1), рассматриваемой как условное (относительно θ) математическое ожидание функции штрафа:

$$R(F_0, \delta) = MM[c(\theta, \delta(y)) \mid \theta] = \int_\Omega r(\theta, \delta)\, dF_0(\theta). \tag{2.1.3}$$

Таким образом, средний риск $R(F_0, \delta)$ представляет собой полное математическое ожидание (см. (1.1.25)) функции штрафа

$$R(F_0, \delta) = Mc(\theta, \delta(y)), \tag{2.1.4}$$

при этом он зависит от априорного распределения параметра θ и от принятой решающей функции.

Если θ — непрерывная случайная величина и $p_0(\theta)$ — ее плотность вероятностей (априорная плотность), то средний риск согласно (3) и (2) можно записать в виде

$$R(p_0, \delta) = \int_\Omega r(\theta, \delta)\, p_0(\theta)\, d\theta = \int_\Omega \int_\Gamma c(\theta, \delta(y))\, p(y \mid \theta)\, p_0(\theta)\, dy d\theta. \tag{2.1.5}$$

Решающая функция, минимизирующая средний риск, т. е. решающая функция δ^*, для которой

$$R(F_0, \delta^*) \leqslant R(F_0, \delta)$$

при всех δ, называется байесовским решением относительно априорного распределения $F_0(\theta)$. Величина $R(F_0, \delta^*)$ называется байесовским риском для F_0. В [21] выявлено важное свойство байесовских решений: при некоторых довольно слабых условиях совокупность всех байесовских решений относительно всех возможных априорных распределений образует полный класс.

Итак, байесовское решение является наилучшим или оптимальным решением, если в качестве критерия оптимальности принят минимум среднего риска — байесовский критерий. Байесовские решения и определяют синтез оптимальных байесовских систем обнаружения и оценивания сигналов на фоне помех. Математический синтез байесовских систем сводится к нахождению общих байесовских решений в задачах обнаружения и выделения сигналов, к конкретизации получаемых решающих функций для заданных распределений сигналов и помех и представлению операций над наблюдаемым процессом в виде соответствующих алгоритмов.

Анализ байесовской системы обработки сигналов сводится к вычислению минимального значения среднего риска, т. е. байесовского риска

$$R(F_0, \delta^*) = \inf_{\delta} R(F_0, \delta), \tag{2.1.6}$$

который является мерой качества работы оптимальной системы.

Представим теперь средний риск (5) в иной форме записи. Используя свойство условных плотностей вероятностей — формулу Байеса, определяющую апостериорную (послеопытную) плотность параметра θ,

$$p(\theta \mid y) = \frac{p(y \mid \theta)\, p_0(\theta)}{\int\limits_{\Omega} p(y \mid \theta)\, p_0(\theta)\, d\theta} = \frac{p(y \mid \theta)\, p_0(\theta)}{p(y)}, \tag{2.1.7}$$

перепишем (5) в виде

$$R(p_0, \delta) = \int\limits_{\Gamma} \widetilde{R}(y, \delta)\, p(y)\, dy, \tag{2.1.8}$$

где

$$\widetilde{R}(y, \delta) = \int\limits_{\Omega} c(\theta, \delta(y))\, p(\theta \mid y)\, d\theta = M[c(\theta, \delta(y)) \mid y] \tag{2.1.9}$$

— апостериорное математическое ожидание функции штрафа, называемое апостериорным риском.

Поскольку $p(y) \geqslant 0$, то из (8) следует, что минимум (если он существует) среднего риска $R(p_0, \delta)$ достигается при том же значении δ^*, что и минимум функции $\widetilde{R}(y, \delta)$ (y — фиксировано). Таким образом, байесовское решение можно находить, минимизируя апостериорный риск. Отметим, что данное утверждение справедливо и в том случае, когда θ — дискретная случайная величина. В этом также нетрудно убедиться, исходя из (3), при этом интеграл в (9) заменится на сумму, а апостериорная плотность $p(\theta|y)$ — на апостериорную вероятность $p(\theta=\theta_i|y)$ (θ_i, $i=1, \ldots, k$ — возможные значения параметра θ).

Математическое ожидание минимального апостериорного риска $\widetilde{R}(y, \delta^*)$ дает согласно (9) и (1.1.25) байесовский риск (6)

$$M\widetilde{R}(y, \delta^*) = MM[c(\theta, \delta^*(y)) \mid y] = Mc(\theta, \delta^*(y)) \tag{2.1.10}$$

и поэтому определяет качество работы байесовской системы.

Таким образом, синтез и анализ байесовских систем можно проводить, оперируя с апостериорным риском. Последний же определяется задаваемой функцией штрафа и апостериорным распределением параметра θ. Поэтому отыскание апостериорных распределений, определяемых по известным априорным распределениям сигналов и помех, — важная задача теории оптимального приема сигналов.

2.1.3. Минимаксные решения и системы. Байесовский подход связан с двумя ограничительными предположениями (см. предыдущий пункт), из которых наиболее сильным обычно является второе. Если априорное распределение параметра θ неизвестно, то байесовский метод в том виде, как он изложен в п. 2.1.2, использовать нельзя. В этом случае остаются различные небайесовские методы выбора наиболее предпочтительной решающей функции, при которых допущения (1) и (2) предыдущего пункта не делаются. Остановимся на одном из таких методов — минимаксном.

Решающая функция δ^* называется минимаксным решением, если

$$\sup_{\theta} r(\theta, \delta^*) \leqslant \sup_{\theta} r(\theta, \delta) \tag{2.1.11}$$

для всех δ. Величина $\sup_{\theta} r(\theta, \delta^*)$ называется минимаксным риском. Если каждое из пространств $\Omega \ni \theta$ и $\Delta \ni \delta$ содержит лишь конечное число элементов, то, очевидно, всегда существует минимаксное решение δ^*, для которого

$$\min_{\delta} \max_{\theta} r(\theta, \delta) = \max_{\theta} r(\theta, \delta^*).$$

Минимаксное решение согласно определению минимизирует максимальное (по всем $\theta \in \Omega$) значение функции риска $r(\theta, \delta)$. Можно сказать, что минимаксное решение является наилучшим решением в наихудшей (относительно θ) ситуации. При этом иногда оно может быть слишком «осторожным».

В общем случае отыскание минимаксного решения — довольно трудная задача. Однако несколько облегчает положение результат Вальда, устанавливающий соответствие между минимаксными и байесовскими решениями. Согласно [21] минимаксное решение δ^* при некоторых слабых ограничениях является байесовским решением относительно наименее благоприятного априорного распределения $\widetilde{F}_0$, максимизирующего байесовский риск, т. е. такого $\widetilde{F}_0$, при котором

$$\inf_{\delta} R(\widetilde{F}_0, \delta) \geqslant \inf_{\delta} R(F_0, \delta) \tag{2.1.12}$$

для всех F_0. При этом минимаксный риск равняется байесовскому риску для $\widetilde{F}_0$:

$$\inf_{\delta} \sup_{\theta} r(\theta, \delta) = \inf_{\delta} R(\widetilde{F}_0, \delta),$$

а функция риска $r(\theta, \delta^*)$ минимаксного решения δ^* не зависит от значений параметра θ. Отсюда, в частности, следует, что если байесовский риск $R(F_0, \delta^*)$ для некоторого априорного распределения F_0 оказывается не зависящим от θ (постоянным на Ω), то априорное распределение F_0 является наименее благоприятным ($F_0 = \widetilde{F}_0$), а байесовское решение δ^* — минимаксным. Это обстоятельство помогает при отыскании наименее благоприятного априорного распределения (часто оно оказывается «равномерным») и минимаксных решений.

Минимаксные решения и риски определяют синтез и анализ систем обработки сигналов, оптимальных по минимаксному критерию.

Пусть наблюдаемый процесс $y(t)$ является либо шумом, либо некоторой смесью (аддитивной или неаддитивной) полезного сигнала и шума. Требуется по результатам наблюдения реализации y в течении некоторого заранее фиксированного времени выяснить, какая из возможных ситуаций имеет место, причем сделать это надо оптимальным способом — с наименьшими потерями.

Очевидно, что поставленную задачу обнаружения сигнала можно решить, в частности, используя методы § 2.1. При этом на рассматриваемом здесь общем этапе решения задачи конкретизация распределений сигналов и помех не потребуется.

2.2.1. Байесовский критерий. В простейшей задаче обнаружения параметр θ (см. п. 2.1.1) принимает лишь два возможных значения, обозначим их через 1 и 0. Пусть значение $\theta=1$ соответствует наличию сигнала в наблюдаемом процессе $y(t)$, а $\theta=0$ — отсутствию сигнала. Множество решений $d \in D$ в данном случае состоит также из двух элементов: d_1 — решение о том, что имеет место ситуация $\theta=1$ (есть сигнал); d_0 — решение о том, что имеет место ситуация $\theta=0$ (нет сигнала). Функция потерь $c(\theta, d)$ здесь переходит в матрицу потерь:

$$c(\theta, d)=\begin{Vmatrix} c(0, d_0), & c(0, d_1) \\ c(1, d_0), & c(1, d_1) \end{Vmatrix}.$$

Без ограничения общности можно положить:

$$c(0, d_0)=c(1, d_1)=0; \quad c(0, d_1)>0; \quad c(1, d_0)>0. \qquad (2.2.1)$$

Рассматриваемая задача обнаружения эквивалентна так называемой проверке простой гипотезы H_1 (утверждение, что $\theta=1$) при простой альтернативе H_0 (утверждение, что $\theta=0$). По результатам наблюдения $y \in \Gamma$ необходимо вынести одно из двух взаимоисключающих решений: d_0 или d_1. В этом случае класс решающих функций $\Delta \ni \delta$ состоит из всевозможных правил разбиения пространства реализаций Γ на две подобласти: Γ_0 и Γ_1, $\Gamma=\Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Отыскание байесовского решения δ^* сводится к выбору указанных подобластей, при которых средний риск минимален. Условимся считать, что

$$\delta(y)=\begin{cases} d_0, & \text{если } y \in \Gamma_0, \\ d_1, & \text{если } y \in \Gamma_1. \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

Средний риск (2.1.3) в рассматриваемом случае равен

$$R(F_0, \delta)=\sum_{\theta=0}^{1} p_\theta \mathrm{M}[c(\theta, \delta(y))\,|\,\theta]=\sum_{\theta=0}^{1} p_\theta \int_\Gamma c(\theta, \delta(y))\, p(y|\theta)\, dy,$$

где

$$p_0=P(\theta=0), \qquad p_1=P(\theta=1) \qquad (2.2.2')$$

— априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала, $p_0+p_1=1$, $(p_0, p_1)=F_0$. Учитывая (1) и (2), получаем

$$R(F_0, \delta)=p_0 \int_{\Gamma_1} c(0, d_1)\, p(y|0)\, dy+p_1 \int_{\Gamma_0} c(1, d_0)\, p(y|1)\, dy. \qquad (2.2.3)$$

Поскольку $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$, а $\int\limits_{\Gamma} p(y|\theta)\,dy = 1$, то

$$R(F_0,\ \delta) = p_0 c(0,\ d_1) - \int\limits_{\Gamma_0} p_0 c(0,\ d_1)\, p(y|0)\, dy + \\ + \int\limits_{\Gamma_0} p_1 c(1,\ d_0)\, p(y|1)\, dy. \qquad (2.2.4)$$

Обозначим через Γ^*_0 подобласть пространства Γ, для которой

$$p_0 c(0,\ d_1)\, p(y|0) > p_1 c(1,\ d_0)\, p(y|1)$$

при всех $y \in \Gamma^*_0$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_0^*} p_0 c(0,\ d_1)\, p(y|0)\, dy > \int\limits_{\Gamma_0^*} p_1 c(1, d_0)\, p(y|1)\, dy,$$

поскольку подынтегральные функции неотрицательны. Возвращаясь к (4), видим, что средний риск $R(F_0,\ \delta)$ минимален, если выбрать $\Gamma_0 = \Gamma^*_0$. При этом $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma^*_0$.

Таким образом, байесовское решение имеет вид:

$$\delta^*(y) = \begin{cases} d_0, & \text{если } \Lambda(y) < h, \\ d_1, & \text{если } \Lambda(y) \geqslant h, \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

где

$$\Lambda = \frac{p(y|1)}{p(y|0)}, \qquad (2.2.6)$$

$$h = \frac{p_0 c\ (0,\ d_1)}{p_1 c\ (1,\ d_0)}. \qquad (2.2.7)$$

Итак, оптимальное по байесовскому критерию правило обнаружения сводится к формированию статистики*) $\Lambda(y)$ (6), называемой отношением правдоподобия (ОП), и к сравнению ее с константой h — порогом обнаружения. Величина порога определяется априорными вероятностями наличия и отсутствия сигнала и задаваемой матрицей потерь.

2.2.2. Критерий Неймана — Пирсона. Чтобы воспользоваться байесовским решением (5)—(7), необходимо знать априорные вероятности p_0 и p_1. Однако в задаче обнаружения они, как правило, неизвестны. В этих условиях следует использовать небайесовский критерий оптимальности, а именно критерий Неймана — Пирсона, при котором байесовских предположений относительно неизвестного параметра θ (см. п. 2.1.2) не делается.

Решающее правило Неймана — Пирсона, как и байесовское, разбивает область $\Gamma \ni y$ на две подобласти: Γ_0 и Γ_1. Однако выбор этих подобластей производится из других соображений.

Введем вероятности ошибочных решений:

$$\alpha = P\{\delta(y) = d_1 \,|\, \theta = 0\} = P\{y \in \Gamma_1 \,|\, 0\} \qquad (2.2.8)$$

— вероятность ошибки 1-го рода или вероятность ложной тревоги,

$$\beta = P\{\delta(y) = d_0 \,|\, \theta = 1\} = P\{y \in \Gamma_0 \,|\, 1\} \qquad (2.2.9)$$

— вероятность ошибки 2-го рода или вероятность пропуска сигнала. Величина $(1-\beta)$ есть вероятность правильного обнаружения.

---

*) Статистикой называется функция наблюдаемой реализации случайного процесса.

Согласно критерию Неймана — Пирсона оптимальным решением считается такое, которое обеспечивает $\min\beta\,(\max\,(1-\beta))$ при условии, что вероятность ложной тревоги не больше заданного числа α $(0<\alpha<1)$:

$$P\{y\in\Gamma_1\,|\,0\}\leqslant\alpha.$$

Покажем, что решающее правило Неймана — Пирсона δ^*, удовлетворяющее указанному критерию, определяется формулой (5), где $\Lambda(y)$ — ОП (6), а h выбирается из условия

$$P\{\Lambda(y)\geqslant h\,|\,0\}=P\{y\in\Gamma_1\,|\,0\}=\alpha. \qquad (2.2.10)$$

Для этого нам потребуется доказать, что для любой области $\tilde{\Gamma}\in\Gamma$, удовлетворяющей лишь условию

$$P\{y\in\tilde{\Gamma}\,|\,0\}\leqslant\alpha. \qquad (2.2.11)$$

и области $\Gamma_1\in\Gamma$ такой, что

$$\Lambda(y)=\frac{p\,(y\,|\,1)}{p\,(y\,|\,0)}\geqslant h, \qquad (2.2.12)$$

для всех $y\in\Gamma_1$ справедливо неравенство

$$P\{y\in\Gamma_1\,|\,1\}\geqslant P\{y\in\tilde{\Gamma}\,|\,1\}. \qquad (2.2.13)$$

Обозначим через G пересечение областей Γ_1 и $\tilde{\Gamma}$, т. е. $G=\Gamma_1\cap\tilde{\Gamma}$; кроме того, обозначим $\Gamma_1\setminus G=A$ и $\tilde{\Gamma}\setminus G=B$. Поскольку $A\subset\Gamma_1$, а для Γ_1 имеет место (12), то

$$\int\limits_A p\,(y\,|\,1)\,dy\geqslant h\int\limits_A p(y\,|0)\,dy.$$

Далее, очевидно,

$$\int\limits_{\Gamma_1} p\,(y\,|\,1)\,dy=\int\limits_A p\,(y|\,1)\,dy+\int\limits_G p\,(y\,|\,1)\,dy\geqslant$$

$$\geqslant h\int\limits_A p\,(y\,|\,0)\,dy+\int\limits_G p\,(y\,|\,1)\,dy=$$

$$=h\int\limits_{\Gamma_1} p\,(y|\,0)\,dy-h\int\limits_G p\,(y\,|\,0)\,dy+\int\limits_G p\,(y\,|\,1)\,dy.$$

Из (10), (11) следует, что

$$\alpha=\int\limits_{\Gamma_1} p\,(y\,|\,0)\,dy\geqslant\int\limits_{\tilde{\Gamma}} p\,(y\,|\,0)\,dy.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_1} p\,(y|\,1)\,dy\geqslant h\int\limits_{\tilde{\Gamma}} p\,(y\,|\,0)\,dy-h\int\limits_G p\,(y\,|\,0)\,dy+$$

$$+\int\limits_G p\,(y|\,1)\,dy=h\int\limits_B p\,(y\,|\,0)\,dy+\int\limits_G p\,(y\,|\,1)\,dy. \qquad (2.2.14)$$

Так как области B и Γ_1 не пересекаются, то в силу (12)

$$\frac{p\,(y\,|\,1)}{p\,(y\,|\,0)}\leqslant h$$

для всех $y\in B$. Поэтому

$$\int\limits_B p\,(y\,|\,1)\,dy\leqslant h\int\limits_B p\,(y\,|\,0)\,dy$$

и, следовательно, из (14) получаем

$$\int_{\Gamma_1} p(y|1)\,dy \geqslant \int_B p(y|1)\,dy + \int_G p(y|1)\,dy = \int_{\widetilde{\Gamma}} p(y|1)\,dy,$$

что и требовалось доказать (см. 13)).

2.2.3. Структура оптимального обнаружителя. Как следует из предыдущих двух пунктов, и байесовский критерий, и критерий Неймана — Пирсона приводят к решающему правилу обнаружения, основанному на сравнении ОП $\Lambda(y)$ с некоторым порогом. Отметим, что и минимаксный критерий приводит к решающему правилу такого же типа. Это непосредственно следует из взаимосвязи байесовских и минимаксных решений (см. п. 2.1.3). Более того, можно показать, (см. [21]), что класс решающих правил, основанных на сравнении ОП с порогом, является полным. Отличие между правилами обнаружения, оптимальными по разным критериям, состоит лишь в различном выборе порога h.

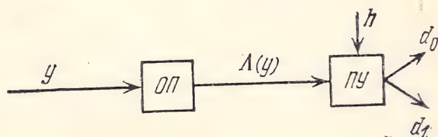


Рис. 2.1

Таким образом, в рассматриваемой задаче обнаружения имеет смысл говорить об общем критерии оптимальности — о критерии отношения правдоподобия, согласно которому оптимальная процедура обнаружения имеет вид:

$$\Lambda(y) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} h. \qquad (2.2.15)$$

В соответствии с этим критерием оптимальный обнаружитель (рис. 2.1) должен формировать ОП $\Lambda(y)$ (блок ОП) и подавать его на пороговое устройство (ПУ), где осуществляется процедура сравнения $\Lambda(y)$ с порогом h, в результате которой выносится одно из двух возможных решений: d_0 (нет сигнала) или d_1 (есть сигнал). Выбор какого-либо частного критерия оптимальности (байесовского, Неймана — Пирсона, минимаксного и др.) сказывается лишь на значении порога h, никак не влияя на основную часть обнаружителя — блок ОП, где происходит оптимальная обработка реализации y.

В ряде практических задач значение h порога срабатывания ПУ устанавливается, исходя из критерия Неймана — Пирсона. Для этого необходимо задаться величиной вероятности ложной тревоги α; тогда соотношение (10) однозначно определяет h. Отметим, что при таком выборе порога априорные вероятности ситуаций (p_0 и p_1) не требуются (в отличие от байесовского критерия, см. (7)). Однако здесь нужно априори задаваться вероятностью ложной тревоги.

Отметим также, что оптимальная обработка (15), очевидно, эквивалентна

$$\varphi(\Lambda(y)) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} \varphi(h) = \widetilde{h},$$

где φ — любая монотонная функция. В том случае, когда ОП $\Lambda(y)$ принадлежит к экспоненциальному семейству функций, в качестве φ целесообразно взять натуральный логарифм. При этом устройство обнаружения упрощается.

2.2.4. Сведение сложной гипотезы к простой. Рассмотрим теперь более сложную задачу обнаружения, когда пространство Ω значений неиз-

вестного параметра (см. п. 2.1.1), от которых зависит распределение вероятностей наблюдаемого процесса, содержит, помимо значений $\theta=0$ и $\theta=1$, другие возможные значения. Пусть $p(y|\mu, 1)$ — условная плотность вероятностей наблюдаемого процесса для случая $\theta=1$ (сигнал есть), зависящая от неизвестного параметра $\mu\in\Omega_1\subset\Omega$, и пусть $p(y|\varkappa, 0)$ — условная плотность наблюдаемого процесса для случая $\theta=0$ (сигнала нет), зависящая от неизвестного параметра $\varkappa\in\Omega_2\subset\Omega$. Параметры μ и $\varkappa$ могут быть векторами; они характеризуют распределения вероятностей смеси сигнала с шумом и одного шума соответственно. Рассматриваемая задача обнаружения состоит в проверке сложной гипотезы при сложной альтернативе.

Найдем байесовское (относительно μ и $\varkappa$) решение данной задачи. При байесовском подходе параметры μ и $\varkappa$ интерпретируются как случайные величины, априорные распределения которых, в частности, плотности вероятностей $p_0(\mu)$, $p_0(\varkappa)$ (если μ, $\varkappa$ — непрерывные величины) считаются известными.

Зная $p_0(\mu)$ и $p_0(\varkappa)$, можно вычислить следующие плотности вероятностей:

$$p(y|1)=\int_{\Omega_1} p(y|\mu, 1)\, p_0(\mu)\, d\mu,$$

$$p(y|0)=\int_{\Omega_2} p(y|\varkappa, 0)\, p_0(\varkappa)\, d\varkappa. \qquad (2.2.16)$$

После вычисления этих плотностей мы приходим к случаю, когда распределение вероятностей наблюдаемого процесса зависит от неизвестного параметра, принимающего лишь два значения ($\theta=0$ и $\theta=1$), т. е. к случаю простой гипотезы при простой альтернативе. В результате рассматриваемая здесь задача обнаружения сводится к изученной ранее, при этом оптимальная процедура обнаружения основана на критерии отношения правдоподобия (см. предыдущий пункт).

Таким образом, структурная схема оптимального обнаружителя остается прежней (рис. 2.1). При этом блок ОП должен формировать отношение правдоподобия $\Lambda(y)$, определяемое согласно (16) формулой:

$$\Lambda(y)=\frac{p(y|1)}{p(y|0)}=\frac{\int_{\Omega_1} p(y|\mu, 1)\, p_0(\mu)\, d\mu}{\int_{\Omega_2} p(y|\varkappa, 0)\, p_0(\varkappa)\, d\varkappa}. \qquad (2.2.17)$$

Выбор порога h, как и раньше, можно производить по различным критериям.

2.2.5. Информационные и неинформационные параметры. Совместное обнаружение и оценка. Остановимся подробнее на случае сложной гипотезы, когда плотность вероятностей смеси сигнала и шума $p(y|\mu, 1)$ зависит от неизвестных параметров $\mu\in\Omega_1$ при простой альтернативе — плотность вероятностей одного шума $p(y|0)$ не содержит неизвестных параметров. В этом случае параметры μ, по существу, являются параметрами обнаруживаемого сигнала.

Введем понятие информационных и неинформационных параметров. Информационными называются такие параметры, которые несут полезную информацию (например, о сигнале) и которые подлежат оценива-

нию (измерению). Неинформационными называются параметры, не подлежащие оцениванию.

Примером информационного параметра может служить время задержки радиосигнала, по которому в радиолокации определяют дальность до цели. Примером неинформационного параметра является неизвестная начальная фаза радиосигнала, затрудняющая его обнаружение. Отметим, что в зависимости от постановки задачи обработки сигнала один и тот же параметр может принадлежать к разным видам. Так, например, допплеровское смещение частоты радиосигнала является информационным параметром, если ставится задача определить скорость движущейся цели. Тот же самый параметр будет неинформационным, если измерять скорость обнаруживаемой цели не требуется.

Допустим, что семейство параметров μ, от которых зависит плотность $p(y|\mu, 1)$, состоит из информационного $\mu_1 \in \Omega_{11}$ и неинформационного $\mu_2 \in \Omega_{12}$ параметров, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Рассматривая, как и в предыдущем пункте, байесовскую постановку, считаем, эти параметры случайными величинами, совместная плотность которых известна: обозначим ее через $p_0(\mu_1, \mu_2)$. В данной постановке оптимальное правило обнаружения, очевидно, имеет прежний вид (15), где

$$\Lambda(y) = \frac{\int\limits_{\Omega_{11}} \int\limits_{\Omega_{12}} p(y|\mu_1, \mu_2, 1)\, p_0(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1 d\mu_2}{p(y|0)}. \quad (2.2.18)$$

Однако, принимая во внимание, что параметр μ_1 — информационный, обработку реализации y, которая определяется формулой (18), целесообразно представить в ином виде, вычислив интеграл только по области Ω_{12}. Для наглядности далее предположим, что информационный и неинформационный параметры статистически независимы, при этом $p_0(\mu_1, \mu_2) = p_0(\mu_1)\, p_0(\mu_2)$. Тогда (18) можно записать в виде

$$\Lambda(y) = \int\limits_{\Omega_{11}} \Lambda(y|\mu_1)\, p_0(\mu_1)\, d\mu_1, \quad (2.2.19)$$

где

$$\Lambda(y|\mu_1) = \frac{\int\limits_{\Omega_{12}} p(y|\mu_1, \mu_2, 1)\, p_0(\mu_2)\, d\mu_2}{p(y|0)} = \frac{p(y|\mu, 1)}{p(y|0)}$$

— условное ОП.

Пусть область Ω_{11} представляет собой отрезок прямой $[\mu_1^0, \mu_1^1]$. Разобьем этот отрезок на n интервалов точками μ_{1i}: $\mu_1^0 = \mu_{10} < \mu_{11} < \ldots$ $\ldots < \mu_{1n} < \mu_1^1$. Тогда

$$\Lambda(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\mu_{1i}}^{\mu_{1, i+1}} \Lambda(y|\mu_1)\, p_0(\mu_1)\, d\mu_1.$$

Предположим, что функция $\Lambda(y|\mu_1)$ непрерывна по μ_1. Так как плотность $p_0(\mu_1) \geqslant 0$, то согласно теореме о среднем существуют такие точки $\mu^*_{1i} \in [\mu_{1i}, \mu_{1, i+1}] = \Delta\mu_{1i}$, что

$$\Lambda(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda(y|\mu^*_{1i})\, P_{0i}, \quad (2.2.20)$$

где

$$P_{0i}=\int\limits_{\mu_{1i}}^{\mu_{1,i+1}} p_0(\mu_1)\,d\mu_1=P\{\mu_1\in\Delta\mu_{1i}\}.$$

Схему обработки реализации y согласно (20) можно представить в виде некоторого n-канального устройства, при этом i-й канал должен формировать условное ОП $\Lambda(y|\mu^*_{1i})$. Если сигнал присутствует ($\theta=1$), то, отыскав j-й канал, для которого выходной эффект максимален, тем самым определим интервал $\Delta\mu_{1j}$, «максимально правдоподобно» содержащий неизвестный параметр μ_1. При этом осуществляется в определенном смысле измерение (оценка) параметра.

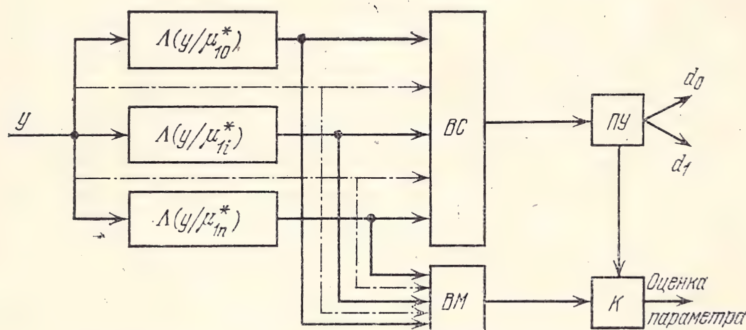


Рис. 2.2

В результате приходим к схеме совместного обнаружения сигнала и оценки его параметра (рис. 2.2). Схема весового суммирования (ВС) складывает выходные сигналы каналов с весами P_{0i} и результат подает на пороговое устройство. Если принимается решение d_1, то ключ К пропускает оценку, которая формируется на выходе устройства выбора максимума (ВМ).

Остановимся на вопросе об оптимальности этой схемы. Если бы случайный параметр μ_1 мог принимать лишь конечное число дискретных значений $\mu_{1i}\in\Omega_{11}$, то вместо интеграла в (19) мы бы сразу имели сумму. В этом случае каждый из каналов схемы рис. 2.2 был бы точно «настроен» на соответствующее значение параметра μ_1, поскольку условное ОП $\Lambda(y|\mu_i)$ зависело бы от известной величины μ_{1i}. При этом обнаружитель был бы оптимальным (по критерию отношения правдоподобия), а оценка, поступающая с блока К, представляла бы собой точечную максимально правдоподобную оценку *) параметра μ_1.

Если же μ_1 — непрерывная случайная величина, то обработка по схеме рис. 2.2, вообще говоря, будет квазиоптимальной. Отход от оптимальности вызван тем, что точки $\mu^*_{1i}\in\Delta\mu_{1i}$ в общем случае неизвестны и их придется выбирать внутри интервалов $\Delta\mu_{1i}$ более или менее произвольным образом. Однако, очевидно, при достаточно малых интервалах $\Delta\mu_i$ (число каналов n достаточно велико) отход от оптимальности будет невелик. При $n\to\infty$ схема переходит в оптимальную.

---

*) Такие оценки рассмотрены в п. 2.3.3.

Далее (гл. 4 и др.) будут рассмотрены более общие подходы к задаче совместного обнаружения и оценивания, не связанные, в частности, с потерей оптимальности и при непрерывных параметрах, являющихся к тому же случайными процессами (а не случайными величинами, как здесь).

2.2.6. Небайесовские критерии. Рассмотренная в п. 2.2.4 редукция сложной гипотезы и сложной альтернативы к простым возможна лишь при байесовской постановке задачи. Если же неизвестные параметры μ и $\varkappa$, от которых зависят условные плотности $p(y|\mu, 1)$ и $p(y|\varkappa, 0)$, нельзя считать случайными величинами с известными распределениями вероятностей, то задача нахождения наилучшего решающего правила существенно усложняется.

В небайесовском случае, когда $\mu \in \Omega_1$ и $\varkappa \in \Omega_2$ — неизвестные неслучайные параметры, оптимальным решающим правилом обнаружения можно было бы считать равномерно наиболее мощное, т. е. такое, которое минимизирует вероятность пропуска сигнала

$$\beta(\mu) = P\{\delta(y) = d_0 \,|\, \mu, \ \theta = 1\} = \int_{\Gamma_0} p(y \,|\, \mu, \ 1)\, dy$$

для всех $\mu \in \Omega_1$ при условии, что вероятность ложной тревоги

$$\alpha(\varkappa) = P\{\delta(y) = d_1 \,|\, \varkappa, \ \theta = 0\} = \int_{\Gamma_1} p(y \,|\, \varkappa, \ 0)\, dy$$

не больше заданного значения α $(0 < \alpha < 1)$ для всех $\varkappa \in \Omega_2$. Однако такие правила существуют лишь в некоторых специальных случаях. Обычно приходится ослаблять требования к решающим правилам, ограничивая класс правил, в котором находится наилучшее. Для такого ограничения можно использовать, например, несмещенные, подобные и инвариантные критерии [67].

Несмещенным называется решающее правило, при котором вероятность ложной тревоги $\alpha(\varkappa)$ и вероятность правильного обнаружения $1 - \beta(\mu)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha(\varkappa) \leqslant \alpha \quad \text{для всех } \varkappa \in \Omega_2;$$

$$1 - \beta(\mu) \geqslant \alpha \quad \text{для всех } \mu \in \Omega_1$$

(вероятность правильного обнаружения ограничена снизу вероятностью ложной тревоги для всех μ и $\varkappa$). Отметим, что в ряде практических задач обнаружения (особенно в радиолокационных) требовать выполнения условия несмещенности вполне естественно.

В задачах обнаружения представляет интерес также подобные решающие правила, при которых вероятность ложной тревоги не зависит от значения параметра

$$\alpha(\varkappa) = \alpha = \text{const}, \text{ для всех } \varkappa \in \Omega_2$$

(в качестве параметра $\varkappa$ могут выступать постоянная составляющая, мощность и другие характеристики помехи). Термин «подобное правило» обусловлен тем, что в рассматриваемом случае область Γ_1 подобна всей области наблюдений $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ в том смысле, что вероятности

$$P\{y \in \Gamma_1 \,|\, \varkappa, \ \theta = 0\} = \alpha; \quad P\{y \in \Gamma \,|\, \varkappa, \ \theta = 0\} = 1$$

не зависят от $\varkappa \in \Omega_2$.

Если задача обнаружения обладает определенной симметрией, так что имеет место инвариантность относительно некоторой группы G преобразований g пространства наблюдений, то можно использовать инвариантный критерий. Согласно этому критерию решающее правило δ должно удовлетворять условию $\delta(gy)=\delta(y)$ для всех $y\in\Gamma$ и $g\in G$. Иначе говоря, критерий является инвариантным, если принимаемое решение не зависит от выбора системы координат $g\in G$.

При отыскании алгоритмов обнаружения иногда целесообразно воспользоваться критерием локальной оптимальности. Пусть Ω'_1 есть некоторое подмножество множества Ω_1 всех значений параметра μ, от которого зависит распределение вероятностей смеси сигнала и шума. Локально-оптимальным правилом обнаружения является такое правило, которое минимизирует вероятность пропуска сигнала $\beta(\mu)$ для значений $\mu\in\Omega'_1$ при условии, что вероятность ложной тревоги не превышает заданную величину. Если параметр μ характеризует, например, уровень полезного сигнала относительно уровня шума (т. е. μ — отношение сигнал/шум) и если Ω'_1 — множество неотрицательных чисел, наибольшее из которых меньше единицы, то указанное правило оптимизирует обнаружение слабых сигналов. Очевидно, равномерно наиболее мощное правило обнаружения является и локально-оптимальным; обратное, вообще говоря, неверно.

Один из возможных способов решения рассматриваемой задачи обнаружения связан с обобщенным критерием отношения правдоподобия. Согласно этому критерию оптимальная процедура обнаружения подобна (15):

$$\Lambda^*(y)\underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} h^*, \qquad (2.2.21)$$

где

$$\Lambda^*(y)=\frac{\sup\limits_{\mu\in\Omega_1} p(y\,|\,\mu,\ 1)}{\sup\limits_{\varkappa\in\Omega_2} (p\,|\,\varkappa,\ 0)}, \qquad (2.2.22)$$

а постоянная h^* (порог) выбирается из условия

$$\int\limits_{\Lambda^*(y)\geqslant h^*} p(y\,|\,\varkappa,\ 0)\,dy\leqslant\alpha$$

для всех $\varkappa\in\Omega_2$ (α — заданная вероятность ложной тревоги).

Интуитивно понятный обобщенный критерий отношения правдоподобия, не имеет, однако, строгого обоснования при конечном времени наблюдения (т. е. при конечном объеме выборки y). Такое обоснование этот критерий получает при исследовании его асимптотических свойств [49, 136].

2.2.7. Качество обнаружения удобно характеризовать вероятностями ошибочных решений: вероятностью ложной тревоги α (8) и вероятностью пропуска сигнала β (9). Вместо β можно, конечно, использовать вероятность правильного обнаружения $D=1-\beta$.

Если применяемая процедура обнаружения имеет вид (15), а $p(y|1)\equiv p(y_1,\ \ldots,\ y_n|1)$, $p(y|0)\equiv p(y_1,\ \ldots,\ y_n|0)$ — плотности вероят-

ностей смеси сигнала и шума и одного шума соответственно, то

$$\alpha = \int\limits_{\Lambda(y_1,\ldots,y_n)>h} \cdots \int p(y_1, \ldots, y_n \mid 0)\, dy_1 \ldots dy_n, \qquad (2.2.23)$$

$$\beta = \int\limits_{\Lambda(y_1,\ldots,y_n)<h} \cdots \int p(y_1, \ldots . y_n \mid 1)\, dy_1 \ldots dy_n. \qquad (2.2.24)$$

Если предварительно вычислить плотности вероятностей статистики $\Lambda(y_1, \ldots, y_n)$ при $\theta=0$ и $\theta=1$ (обозначим их через $p(\Lambda|0)$ и $p(\Lambda|1)$), то вероятности (23), (24) можно представить в виде однократных интегралов

$$\alpha = \int\limits_h^\infty p(\Lambda \mid 0)\, d\Lambda, \qquad (2.2.25)$$

$$\beta = \int\limits_0^h p(\Lambda \mid 1)\, d\Lambda, \qquad D = \int\limits_h^\infty p(\Lambda \mid 1)\, d\Lambda.$$

Формулы типа (23)—(25) позволяют рассчитывать вероятности ошибок как для оптимальных, так и для неоптимальных обнаружителей. Анализ последних, безусловно, представляет интерес, поскольку на практике по ряду причин (о которых еще будет идти речь) применяется обычно квазиоптимальная и неоптимальная обработка. Для оптимальных, например по критерию отношения правдоподобия, обнаружителей области интегрирования в (23), (24) задаются ОП $\Lambda(y)=\Lambda(y_1, \ldots, y_n)$ и соответствующим порогом h. Если же анализируется неоптимальный обнаружитель, сравнивающий с порогом $\tilde{h}$ некоторую статистику $\tilde{\Lambda}(y_1, \ldots, y_n)$, то в (23), (24) вместо $\Lambda(y_1, \ldots, y_n)$ и h нужно подставить $\Lambda(y_1, \ldots, y_n)$ и $\tilde{h}$. Подобное замечание относится и к (25).

Через вероятности ошибочных решений можно выразить и другие характеристики обнаружения, например байесовский риск (2.1.6). Из (2) и (3), (5) следует, что байесовский риск при обнаружении равен

$$R(F_0, \delta^*) = p_0 c(0, d_1) \int\limits_{\Lambda(y)\geqslant h} p(y \mid 0)\, dy + p_1 c(1, d_0) \times$$

$$\times \int\limits_{\Lambda(y)<h} p(y \mid 1)\, dy = p_0 c(0, d_1)\, \alpha + p_1 c(1, d_0)\, \beta. \qquad (2.2.26)$$

Байесовский риск служит мерой качества работы только оптимального байесовского обнаружителя. Однако можно получить выражение и для среднего риска $R(F_0, \tilde{\delta}) > R(F_0, \delta^*)$, соответствующего некоторому неоптимальному решающему правилу обнаружения $\tilde{\delta}$ типа $\tilde{\Lambda}(y) \gtrless \tilde{h}$. Средний риск $R(F_0, \tilde{\delta})$ определяется формулой (26), если в ней заменить $\Lambda(y)$, h, α, β на $\tilde{\Lambda}(y)$, $\tilde{h}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ соответственно.

Подчеркнем, что средние риски $R(F_0, \delta^*)$ и $R(F_0, \tilde{\delta})$ могут характеризовать качество оптимальных и неоптимальных обнаружителей только при байесовской постановке задачи, т. е. когда априорные вероятности $F_0=(p_0, p_1)$ существуют и известны. При описании качества обнаружения характеристиками (23), (24) априорные вероятности (p_0, p_1) не нужны.

2.2.8. Многоальтернативное обнаружение. Рассмотренные в п. 2.2.1—2.2.7 вопросы касались двухальтернативного обнаружения, когда класс возможных решений D состоял лишь из двух элементов d_1 (есть сигнал) и d_0 (нет сигнала). В более общей постановке задачи класс D содержит большее число элементов, что связано, в частности, с необходимостью обработки многих сигналов и вынесением соответствующих решений. Возникающая при этом задача проверки многих гипотез и есть задача многоальтернативного обнаружения.

Многоальтернативные задачи обнаружения приходится решать, например, в радиосвязи и радиолокации при различении сигналов, распознавании многих целей, при разрешении сигналов (целей) и т. д. Отметим, что задачу совместного обнаружения сигнала и оценки его параметров (см. п. 2.2.5) также можно рассматривать с позиций многоальтернативного обнаружения. Вообще, статистическая теория многоальтернативного обнаружения, по существу, адекватна статистической теории распознавания образов, имеющей значительное поле применения.

Рассмотрим задачу многоальтернативного обнаружения в байесовской постановке. Предположим, что в течение фиксированного времени наблюдается случайный процесс $\{y(t)\}$ (протекающий в дискретном или непрерывном времени), все реализации которого определены в области $\Gamma \ni y$. Наблюдаемый процесс представляет собой либо шум, либо смесь сигнала и шума, при этом сигнал может принадлежать одному из m неперекрывающихся классов *). Соответствующие состояния реализации y ассоциируем со значениями дискретной случайной величины θ: 0, 1, ..., m. Априорные вероятности состояний предполагаются известными: обозначим их через

$$p_j = P\{\theta = j\}, \quad j = 0,\ 1, \dots, m; \sum_{j=0}^{m} p_j = 1.$$

В результате наблюдения реализации y требуется принять одно из $(m+1)$ решений: d_0, d_1, ..., d_m, где d_j — решение, согласно которому считается, что $\theta = j$. Задана матрица потерь

$$c(\theta,\ d) = \| c(i,\ d_j) \|, \quad i,\ j = 0,\ 1, \dots, m,$$

где $c(i,\ d_j)$ — потери, возникающие в результате принятия решения d_j при условии, что имеет место состояние $\theta = i$.

Байесовское решение δ^*, минимизирующее средний риск, как уже отмечалось, можно искать путем минимизации апостериорного риска (2.1.9). Последний в рассматриваемом случае при вынесении решения $\delta(y) = d_j$ равен

$$R(y,\ d_j) = \mathbf{M}\,[c(\theta,\ \delta(y) \mid y] = \sum_{i=0}^{m} c(i,\ d_j) P(\theta = i \mid y),$$

где $P(\theta = i \mid y)$ — апостериорная вероятность состояния $\theta = i$. Оптимальное правило δ^* состоит в принятии решения $\delta^*(y) = d_k$, если осуществляется неравенство

$$\sum_{i=0}^{m} c(i,\ d_k) P(\theta = i \mid y) \leqslant \sum_{i=0}^{m} c(i,\ d_j) P(\theta = i \mid y) \qquad (2.2.27)$$

---

*) Можно, конечно, дать и другую физическую интерпретацию рассматриваемой здесь задачи.

для всех $j \neq k$. При осуществлении равенства, например, при некотором $j=q$, безразлично (с точки зрения байесовского критерия), какое решение принимать: d_k или d_q. Это решающее правило можно записать по-другому, если ввести ОП

$$\Lambda_i(y) = \frac{p(y \mid \theta = i)}{p(y \mid \theta = 0)}, \quad i = 0, 1, \dots m, \tag{2.2.28}$$

$(\Lambda_0(y) \equiv 1)$ и поделить обе части неравенства (27) на $p(\theta=0 \mid y)$. Тогда

$$\delta^*(y) = d_k,$$

если

$$\sum_{i=0}^{m} c(i, d_k) p_i \Lambda_i(y) \leqslant \sum_{i=0}^{m} c(i, d_j) p_i \Lambda_i(y), \tag{2.2.29}$$

$$j = 0, 1, \dots, m, \quad j \neq k.$$

В том частном случае, когда $m=1$, а $c(0, d_0)=c(1, d_1)=0$, решающее правило (29) дает, естественно, правило (5)—(7).

Остановимся еще на одном частном случае, когда

$$c(i, d_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j, \\ 1 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, m. \tag{2.2.30}$$

При этом правило (29) упрощается:

$$\delta^*(y) = d_k, \quad \text{если } p_k \Lambda_k(y) \geqslant p_j \Lambda_j(y),$$
$$j = 0, 1, \dots, m, \ j \neq k. \tag{2.2.31}$$

Если к тому же априорные вероятности всех состояний одинаковы:

$$p_j = p, \quad j = 0, 1, \dots, m, \tag{2.2.32}$$

то правило (31) сводится к выбору наибольшего ОП:

$$\delta^*(y) = d_k, \quad \text{если } \Lambda_k(y) \geqslant \Lambda_j(y), \tag{2.2.33}$$
$$j = 0, 1, \dots, m, \quad j \neq k, \ (\Lambda_0(y) \equiv 1).$$

Многоальтернативное обнаружение применимо, например, к тому случаю, когда наблюдаемый процесс представляет собой либо шум, либо смесь шума с одним из m возможных сигналов (обнаружение и различение сигналов). Однако рассматриваемый метод применим для решения и других практических задач. Например, наблюдаемый процесс может быть либо шумом, либо смесью шума и сигнала, параметр которого μ принимает одно из m возможных значений μ_j, $j=1, \dots, m$. Решая эту задачу в рамках многоальтернативного обнаружения (наблюдаемый процесс, содержащий шум и сигнал с параметром μ_j, ассоциируем со значением θ_j, $j=1, \dots, m$, введенной ранее случайной величины θ), будем решать, по существу, задачу совместного обнаружения сигнала и оценки его параметра, о которой шла речь в п. 2.2.5. При этом, если выполняются соотношения (30), (32), то, воспользовавшись алгоритмом (33), опять приходим к многоканальной схеме обработки сигналов, в которой оценка параметра определяется по номеру канала с максимальным выходным эффектом (как и в схеме рис. 2.2). Структура каналов задается ОП (28); в рассматриваемой задаче $\Lambda_i(y)$ представляет собой условное ОП:

$$\Lambda_i(y) \equiv \Lambda(y \mid \mu_i) = \frac{p(y \mid \mu_i, \ \theta = 1)}{p(y \mid \theta = 0)}, \quad i = 1, \dots, m$$

(значения $\theta=1$ и $\theta=0$ ассоциированы с ситуациями наличия и отсутствия полезного сигнала).

Мерой качества многоальтернативного обнаружения может служить средний риск, а также вероятности ошибочных решений

$$\beta_{ij}=P\{\delta(y)=d_i \mid \theta=j\}, \quad i, j=0, 1, \ldots, m, \; i\neq j. \tag{2.2.34}$$

Эти вероятности вычисляются по формулам

$$\beta_{ij}=\int\limits_{\Gamma_i(y)} p(y \mid \theta=j)\, dy, \tag{2.2.35}$$

где область $\Gamma_i(y)\subset\Gamma$ включает те реализации $y=(y_1, \ldots, y_n)$, для которых $\delta(y)=d_i$. В случае оптимального обнаружения области интегрирования $\Gamma^*_i(y)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ определяются согласно (29). Формулы (35) являются обобщением (23), (24).

2.2.9. Отношение правдоподобия — мартингал. Отношение правдоподобия

$$\Lambda(y)=\frac{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=1)}{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=0)} \equiv \Lambda_n, \tag{2.2.36}$$

как ясно из предыдущего, играет фундаментальную роль в теории обнаружения сигналов. Остановимся еще на одном его важном свойстве. Покажем, что статистика (36), рассматриваемая как случайный процесс, является мартингалом.

Для этого вычислим условное математическое ожидание

$$M[\Lambda_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_1, \theta=0]=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_n}\frac{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=1)}{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=0)}\, p(y_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_1, \theta=0)\, dy_n$$

Γ_n — область определения величины y_n). Так как

$$p(y_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_1, \theta=0)=\frac{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=0)}{p(y_1, \ldots, y_{n-1} \mid \theta=0)},$$

то

$$M[\Lambda_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_1, \theta=1]=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_n}\frac{p(y_1, \ldots, y_n \mid \theta=1)}{p(y_1, \ldots, y_{n-1} \mid \theta=0)}\, dy_n=\frac{p(y_1, \ldots, y_{n-1} \mid \theta=1)}{p(y_1, \ldots, y_{n-1} \mid \theta=0)}=\Lambda_{n-1}.$$

Учитывая, что

$$M[\Lambda_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_1, \theta=0]=M[\Lambda_n \mid \Lambda_{n-1}, \ldots, \Lambda_1, \theta=0],$$

имеем

$$M[\Lambda_n \mid \Lambda_{n-1}, \ldots, \Lambda_1, \theta=0]=\Lambda_{n-1}, \tag{2.2.37}$$

т. е. согласно (1.3.1) случайный процесс $\{\Lambda_n\}$ — мартингал.

Отметим, что ОП (36) является мартингалом, как следует из приведенного доказательства, при $\theta=0$. В то же время при $\theta=1$ эта статистика не будет мартингалом, однако обратная ей

$$\lambda_n=1/\Lambda_n$$

является, очевидно, мартингалом при $\theta=1$.

Строго говоря, ОП (36) представляет собой мартингал (при $\theta=0$) в том случае, если $p(y_1, \ldots, y_n|\theta=1)=0$ всюду, где $p(y_1, \ldots, y_n|\theta=0)=0$, т. е. когда распределение $p(\cdot|\theta=1)$ абсолютно непрерывно относительно $p(\cdot|\theta=0)$. Если же это условие не выполняется, то ОП — полумартингал (см. [38]).

2.3.1. Вводные замечания. Пусть наблюдаемый процесс $\{y_t\}$ является некоторой смесью полезного сигнала и шума, которые пока не конкретизируются. Требуется определить, какое значение принял сигнал (или его параметр) в наблюдаемой смеси y, т. е. требуется оценить значение сигнала (параметра).

Оптимальное правило оценивания, как и оптимальное правило обнаружения, определяется наилучшей в определенном смысле решающей функцией δ, которую можно отыскать методами § 2.1. Параметр $\theta \in \Omega$ (см. п. 2.1.1) ассоциируем со значением полезного сигнала (или его параметра).

В отличие от задачи обнаружения, в которой параметр θ принимал лишь дискретные значения, здесь этот параметр принимает, вообще говоря, непрерывное множество значений (однако в некоторых задачах оцениваемый параметр θ может быть и дискретным). В соответствии с этим и пространство решений $D \ni d$, которые можно вынести относительно значений параметра θ, также представляет собой, вообще говоря, непрерывное множество с бесконечным числом решений. По наблюдаемой реализации y в результате применения решающей функции δ выносится решение $\delta(y) = d$, которое и используется в качестве неизвестного значения θ. В данном случае решение $d = \delta(y)$ называется точечной оценкой (или просто оценкой) параметра θ. Если при этом пространство $\Omega \ni \theta$ — вся вещественная числовая ось, то и пространство $D \ni d$ — тоже вся вещественная числовая ось. Вместо термина *оценка* обычно используется термин *фильтрация*, если оцениваемый параметр является случайным процессом.

2.3.2. Байесовские оценки. Оптимальная по байесовскому критерию оценка параметра θ представляет собой байесовское решение $\delta^*(y) = d^*$ относительно известного априорного распределения случайной величины θ (см. п. 2.1.2).

В более общей постановке задачи оцениваемый параметр является случайным процессом $\theta(t) \equiv \theta_t$. Точечная оценка процесса θ_t есть решение $\delta(y_0^t) = d_t$, зависящее от принятой реализации $y_0^t \equiv y$ процесса $\{y_t\}$ на отрезке $[0, t]$. Чтобы приступить к отысканию оптимальной (байесовской) оценки, необходимо задать функцию потерь $c(\theta_t, d_t)$. Одной из наиболее употребительных является квадратичная:

$$c(\theta_t, d_t) = (\theta_t - d_t)^2. \tag{2.3.1}$$

Байесовскую оценку $\delta^*(y_0^t)$ определяют в результате минимизации апостериорного риска (2.1.9), который для (1) равен

$$\tilde{R}(y, \delta) = \mathbf{M}\{[\theta_t - \delta(y_0^t)]^2 \mid y_0^t\}. \tag{2.3.2}$$

В силу свойств условного математического ожидания

$$\tilde{R}(y, \delta) = \mathbf{M}(\theta_t^2 \mid y_0^t) - 2\delta(y_0^t)\,\mathbf{M}(\theta_t \mid y_0^t) + \delta^2(y_0^t).$$

Очевидно, что

$$\tilde{R}(y, \delta) = [\delta(y_0^t) - \mathbf{M}(\theta_t \mid y_0^t)]^2 + \{\mathbf{M}(\theta_t^2 \mid y_0^t) - [\mathbf{M}(\theta_t \mid y_0^t)]^2\}. \tag{2.3.3}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, не зависит от оценки $\delta(y_0^t)$, поэтому минимизировать нужно первый член. Этот член неотрицателен,

при этом минимальное значение достигается, если он равен нулю. Следовательно,

$$d_t^* = \delta^*(y_0^t) = M(\theta_t \mid y_0^t). \qquad (2.3.4)$$

Таким образом, байесовская оценка при квадратичной функции потерь представляет собой апостериорное математическое ожидание оцениваемого процесса θ_t.

Очевидно, что

$$Md_t^* = MM(\theta_t \mid y_0^t) = M\theta_t,$$

т. е. оценка (4) является несмещенной.

Байесовский риск, определяющий качество оптимальной оценки, согласно (2.1.10) и (3), (4) равен

$$M\widetilde{R}(y, \delta^*) = M\{M(\theta_t^2 \mid y_0^t) - [M(\theta_t \mid y_0^t)]^2\} =$$
$$= M\theta_t^2 - M[M(\theta_t \mid y_0^t)]^2 = M[\theta_t - M(\theta_t \mid y_0^t)]^2. \qquad (2.3.5)$$

Для любой оценки

$$M(\theta_t - d_t)^2 \geqslant M(\theta_t - d_t^*)^2 = M\widetilde{R}(y, \delta^*).$$

Разность $(\theta_t - d_t)$ представляет собой ошибку оценивания. Поэтому можно говорить, что оценка (4) оптимальна по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Данную оценку будем называть также байесовской среднеквадратической оценкой (БСО).

Рассмотрим частный случай, когда оцениваемый параметр является случайной величиной θ. Покажем, что в этом случае БСО

$$d^*_n = \delta^*(y^n_0) = M(\theta \mid y_0, y_1, \ldots, y_n) \qquad (2.3.6)$$

есть мартингал. Имеем очевидную цепочку равенств:

$$M(d^*_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_0) =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_n} \left[\int\limits_{\Omega} \theta p(\theta \mid y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0)\, d\theta\right] p(y_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_0)\, dy_n =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_n}\int\limits_{\Omega} \theta p(\theta, y_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_0)\, d\theta dy_n = \int\limits_{\Omega} \theta p(\theta \mid y_{n-1}, \ldots, y_0)\, d\theta = d^*_{n-1}.$$

И так как $M(d^*_n \mid y_{n-1}, \ldots, y_0) = M(d^*_n \mid d^*_{n-1}, \ldots, d^*_0)$, то согласно (1.3.1), процесс $\{d^*_n\}$ — мартингал.

Отметим, что если оцениваемый параметр — случайный процесс, то БСО, вообще говоря, не является мартингалом.

Найдем байесовскую оценку еще для одной функции потерь

$$c(\theta_t, d_t) = c - \delta(\theta_t - d_t), \qquad (2.3.7)$$

где константа $c > 0$, а δ — дельта-функция. Апостериорный риск в этом случае равен

$$M\{[c - \delta(\theta_t - d_t)] \mid y_0^t\} = \int\limits_{\Omega} [c - \delta(\theta_t - d_t)]\, p(\theta_t \mid y_0^t)\, d\theta_t = c - p(d_t \mid y_0^t)$$

($p(\theta_t \mid y^t_0)$ — апостериорная плотность вероятностей процесса θ_t). Отсюда видно, что оценка d^*_t, минимизирующая апостериорный риск, должна

максимизировать апостериорную плотность оцениваемого процесса. Таким образом, байесовская оценка при функции потерь вида (7) является оптимальной оценкой по критерию максимума апостериорной плотности вероятностей.

Отметим, что при дискретном параметре θ, принимающем значения θ_i, $i=1, 2, \ldots$, аналогом функции потерь (7) будет

$$c(\theta_i,\ d) = 1 - \delta_{\theta_i d}, \tag{2.3.7'}$$

где $\delta_{\theta_i d}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{\theta_i d} = \begin{cases} 1 & \text{при } d = \theta_i, \\ 0 & \text{при } d \neq \theta_i. \end{cases}$$

Байесовская оценка при такой функции потерь является оптимальной оценкой по критерию максимума апостериорной вероятности.

2.3.3. Оценка максимального правдоподобия. Из небайесовских методов оценивания наибольшее распространение получил метод максимального правдоподобия [57, 83, 136].

Пусть неслучайный параметр θ определен на множестве Ω и пусть

$$L(\theta) = p(y|\theta)$$

— функция правдоподобия ($p(\cdot|\theta)$ — плотность вероятностей наблюдений $y \in \Gamma$, зависящая от θ). Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) называется такая точечная оценка $d^* = \delta^*(y)$, для которой

$$L(d^*) = \sup_{\theta \in \Omega} L(\theta). \tag{2.3.8}$$

Если супремум достигается во внутренней точке множества Ω и, кроме того, если функция правдоподобия дифференцируема по θ, то оценка $d^* = \delta^*(y)$ является корнем уравнения

$$dL(\theta)/d\theta = 0. \tag{2.3.9}$$

Отметим, что корни вида $\theta = \text{const}$ нужно, очевидно, отбросить. Вместо уравнения (9) для нахождения ОМП d^* обычно удобнее использовать

$$d \ln L(\theta)/d\theta = 0. \tag{2.3.10}$$

Прежде чем обсуждать качество оценки d^*, остановимся на одном общем свойстве точечных оценок. Пусть $d = \delta(y)$ — точечная несмещенная оценка параметра θ, т. е. $\mathbf{M}\delta(y) = \theta$. Тогда

$$\int_\Gamma [\delta(y) - \theta]\, p(y|\theta)\, dy = 0.$$

Отсюда в результате дифференцирования по θ получаем

$$\int_\Gamma [\delta(y) - \theta] \frac{\partial}{\partial\theta} p(y|\theta)\, dy = \int_\Gamma p(y|\theta)\, dy = 1.$$

Перепишем это равенство следующим образом:

$$1 = \int_\Gamma [\delta(y) - \theta]\, p(y|\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(y|\theta)\, dy =$$

$$= \int_\Gamma [\delta(y) - \theta] \sqrt{p(y|\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(y|\theta) \sqrt{p(y|\theta)}\, dy.$$

Используя теперь неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$1 \leqslant \int_{\Gamma} [\delta(y)-\theta]^2 p(y|\theta)\,dy \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(y|\theta)\right]^2 p(y|\theta)\,dy,$$

т. е.

$$\mathbf{M}[\delta(y)-\theta]^2 = \mathbf{D}\delta(y) \geqslant \frac{1}{\mathbf{M}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(y|\theta)\right]^2}. \qquad (2.3.11)$$

Неравенство (11) (неравенство Рао — Крамера) устанавливает нижнюю границу дисперсии $\mathbf{D}\delta(y)$ любой несмещенной оценки *).

Если дисперсия несмещенной оценки равняется нижней грани в (11), то такую оценку целесообразно назвать наиболее эффективной (а не просто эффективной, как она обычно именуется). Эффективной же оценкой стоит назвать, как рекомендуется в [83, с. 298], несмещенную оценку, которая имеет наименьшую возможную дисперсию.

Равенство в (11) достигается, если неравенство Коши — Буняковского для рассматриваемого случая переходит в равенство. Последнее же имеет место тогда, когда для всех $y \in \Gamma$ и $\theta \in \Omega$

$$\frac{d \ln p(y|\theta)}{d\theta} = [\delta(y)-\theta]\, f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — функция, не зависящая от y. Это равенство должно выполняться для всех значений θ, в том числе и для некоторой оценки $\hat{\hat{\theta}}$ параметра θ, при которой

$$[\delta(y)-\hat{\hat{\theta}}]\, f(\hat{\hat{\theta}}) = 0 = \left.\frac{d\ln p(y|\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\hat{\hat{\theta}}}. \qquad (2.3.12)$$

Функция $f(\cdot)$ не зависит от y. Поэтому если существует оценка $\delta(y)$, для которой в (11) достигается знак равенства, то, как следует из (12),

$$\delta(y) = \hat{\hat{\theta}},$$

где оценка $\hat{\hat{\theta}}$ является решением уравнения максимального правдоподобия (10).

Таким образом, если существует наиболее эффективная оценка, то она совпадает с ОМП. В данном случае ОМП является оптимальной в том смысле, что ее дисперсия имеет наименьшее возможное значение.

Однако, если наиболее эффективной оценки не существует, то вообще говоря, нельзя утверждать, что ОМП d^* оптимальна, поскольку не исключено существование эффективной оценки, дисперсия которой меньше дисперсии оценки d^*.

В то же время ОМП $d^*_n = \delta^*(y_0^n)$ почти всегда (при выполнении условий регулярности, накладываемых на функцию правдоподобия, см., например, [136]) асимптотически оптимальна, так как она состоятельна:

$$d_n^* \xrightarrow{p} \theta,$$

асимптотически несмещенна:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} d_n^* = \theta,$$

*) Необходимо иметь в виду, что это утверждение справедливо в рассматриваемом здесь регулярном случае: при условии дифференцируемости (по θ) функции правдоподобия и существования интегралов, используемых при выводе (11).

асимптотически наиболее эффективна:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\,(d_n^* - \theta)^2}{M\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln p\,(y_0^n\,|\,\theta)\right]^2} = 1.$$

2.3.4. Обнаружение как оценка параметра. Выше уже отмечались некоторые формы взаимосвязи между обнаружением и оцениванием (см. п. 2.2.5 и 2.2.8). К этому же добавим, что задачу оценки параметра θ можно рассматривать как задачу многоальтернативного обнаружения с конечным (если $\Omega \ni \theta$ содержит конечное число элементов) или бесконечным числом альтернатив.

Здесь мы остановимся на выявлении обратной взаимосвязи, рассматривая обнаружение с позиций оценки параметра. Оцениваемым параметром будет параметр θ, который принимает два возможных значения (1 и 0), характеризующих наличие и отсутствие сигнала в наблюдаемом процессе $\{y_t\}$. В байесовской постановке задачи оценивания параметр θ представляет собой случайную величину с известным априорным распределением (2.2.2′).

Вначале найдем БСО $d^* = \hat{\theta}(y)$ параметра θ. Согласно (4)

$$\hat{\theta}(y) = \sum_i \theta_i P(\theta_i\,|\,y),$$

где $P(\theta_i\,|\,y)$ — апостериорная вероятность того, что $\theta = \theta_i$. Так как в рассматриваемом случае $i = 0{,}1$, а $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$, то

$$\hat{\theta}(y) = P(1\,|\,y), \tag{2.3.13}$$

т. е. БСО параметра θ равна апостериорной вероятности наличия сигнала.

Обратимся теперь к байесовской процедуре обнаружения, которая имеет вид (2.2.5)—(2.2.7):

$$\Lambda(y) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} \frac{p_0}{p_1} \tag{2.3.14}$$

(положили $c(0, d_1) = c(1, d_0)$). Введем отношение апостериорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала

$$l(y) = \frac{P(1\,|\,y)}{P(0\,|\,y)}.$$

Статистика $l(y)$ связана с ОП $\Lambda(y)$ простым соотношением:

$$l(y) = \frac{p_1}{p_0}\Lambda(y). \tag{2.3.15}$$

Используя (15), перепишем (14) в виде

$$l(y) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} 1 \text{ или } P(1\,|\,y) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} P(0\,|\,y). \tag{2.3.16}$$

В силу условия нормировки

$$P(1\,|\,y) + P(0\,|\,y) = 1$$

и (13) процедура (16) (а вместе с ней и (14)) эквивалентна

$$\hat{\theta}(y) \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}. \tag{2.3.17}$$

Таким образом, байесовская процедура обнаружения (14) равносильна формированию БСО параметра θ и ее сравнению с порогом $h=1/2$.

Найдем теперь оценку $\theta^*(y)$ параметра θ, оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности. Используя соответствующую функцию потерь (см. 7′), запишем выражение для апостериорного риска:

$$M[(1-\delta_{id})\,|\,y]=1-\delta_{0d}P(0\,|\,y)-\delta_{1d}P(1|y)$$

(δ_{id} — символ Кронекера). Отсюда получаем, что оценка $d^*=\theta^*(y)$, минимизирующая апостериорный риск, равна

$$\theta^*(y)=\begin{cases}1, & \text{если } P(1\,|\,y)>P(0\,|\,y),\\ 0, & \text{если } P(1\,|\,y)<P(0\,|\,y).\end{cases} \qquad (2.3.18)$$

Найденная оценка соответствует процедуре (16).

Таким образом, оценивание параметра θ по критерию максимума апостериорной вероятности эквивалентно байесовской процедуре обнаружения (14).

Обратим внимание на то, что в предыдущем случае оценку $\hat{\theta}(y)$ параметра θ нужно было сравнивать с порогом (см. (17)), чтобы принять решение об обнаружении d_1 или о необнаружении d_0 сигнала. В данном же случае оценку $\theta^*(y)$ того же самого параметра не требуется сравнивать с порогом; операция сравнения с порогом содержится уже в самой оценке (см. (18)). Отмеченное обстоятельство связано с тем, что среднеквадратическая оценка (13) определена на всем отрезке [0, 1], в то время как оценка $\theta^*(y)$ — только в его крайних точках (как и решения d_0, d_1).

Рассмотрим теперь небайесовскую постановку задачи, когда параметр $\theta=0,1$ неслучайный. В качестве оценки этого параметра используем ОМП $d^*=\hat{\hat{\theta}}(y)$, которая согласно (8) имеет вид:

$$\hat{\hat{\theta}}(y)=\begin{cases}1, & \text{если } p(y\,|\,1)>p(y\,|\,0),\\ 0, & \text{если } p(y\,|\,1)<p(y\,|\,0).\end{cases}$$

Отсюда следует, что формирование ОМП параметра θ эквивалентно процедуре обнаружения Неймана — Пирсона, для которой вероятность ложной тревоги равна

$$\alpha=P\{\Lambda(y)>1\,|\,\theta=0\}.$$

С другой стороны, формирование небайесовской оценки (19) равносильно байесовской процедуре обнаружения (14) при $p_0=p_1=1/2$ (критерий идеального наблюдателя).

Итак, задачу обнаружения сигнала в шуме можно рассматривать как задачу оценки дискретного параметра, принимающего два значения: 0 и 1. При этом между критериями оптимальности оценивания и обнаружения существует отмеченное взаимосоответствие.

Глава 3

ОБНАРУЖЕНИЕ ГАУССОВСКИХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАУССОВСКИХ ПОМЕХ

В главе рассматриваются вопросы синтеза и анализа обнаружителей при использовании в качестве моделей сигналов и помех гауссовских случайных процессов.

3.1. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

3.1.1. Дискретное время. Рассмотрим случай, когда наблюдаемый процесс $\{y(t_i)\}$ протекает в дискретном времени. Пусть

$$y(t_i) \equiv y_i = \begin{cases} x_i + \eta_i, & \text{при } \theta = 1; \\ \eta_i \ , & \text{при } \theta = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1.1}$$

где $\{x_i\}$, $\{\eta_i\}$ — гауссовские сигнал и помеха, корреляционные матрицы которых $\mathbf{K}_x$ и $\mathbf{K}_\eta$ известны, а $\mathbf{M}x_i = \mathbf{M}\eta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. В дальнейшем соотношения типа (1) будем записывать в виде

$$y_i = \theta x_i + \eta_i, \quad \theta = 0,\ 1,\ i = 1, \dots, n.$$

В данном случае распределения вероятностей сигнала и помехи полностью известны. Неизвестным является лишь параметр θ, характеризующий две возможные ситуации: есть сигнал ($\theta = 1$), нет сигнала ($\theta = 0$). В такой постановке задачи синтез оптимального обнаружителя определяется критерием отношения правдоподобия (см. п. 2.2.3), при этом структурная схема обнаружителя имеет вид рис. 2.1. Синтез в данном случае по существу сводится к нахождению отношения правдоподобия, которое определит структуру блока ОП (см. рис. 2.1).

Чтобы найти ОП, нужно записать плотности вероятностей $p(\mathbf{y}|\theta)$ наблюдаемого процесса $\{y_i\}$ при обеих ситуациях. В том случае, когда наблюдаемый процесс представляет собой помеху (т. е. при $\theta = 0$), согласно (1.1.31)

$$p(\mathbf{y}\,|\,\theta = 0) = (2\pi)^{-n/2} \det{}^{-1/2} \mathbf{K}_\eta \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{K}_\eta^{-1}\mathbf{y}\right\}, \tag{3.1.2}$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — вектор-столбец наблюденных значений. Так как гауссовские сигнал и помеха аддитивны (см. 1), то процесс $\{y_i\}$ будет гауссовским и при $\theta = 1$. Его корреляционную матрицу обозначим через $\mathbf{K}_{x+\eta}$. Если сигнал и шум статистически независимы между собой, то

$$\mathbf{K}_{x+\eta} = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_\eta. \tag{3.1.3}$$

Зная $\mathbf{K}_{x+\eta}$, можно записать

$$p(\mathbf{y}\,|\,\theta = 1) = (2\pi)^{-n/2} \det{}^{-1/2} \mathbf{K}_{x+\eta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{K}_{x+\eta}^{-1}\mathbf{y}\right\}. \tag{3.1.4}$$

Из (2), (4) получаем ОП:

$$\Lambda = \frac{p(\mathbf{y}\,|\,\theta=1)}{p(\mathbf{y}\,|\,\theta=0)} =$$

$$= \frac{\det^{1/2} \mathbf{K}_{\eta}}{\det^{1/2} \mathbf{K}_{x+\eta}} \exp\left\{\frac{1}{2}\, \mathbf{y}^{T} (\mathbf{K}_{\eta}^{-1} - \mathbf{K}_{x+\eta}^{-1})\, \mathbf{y}\right\}. \quad (3.1.5)$$

Очевидно, что оптимальная обработка (5) эквивалентна обработке

$$z = \mathbf{y}^{T} (\mathbf{K}_{\eta}^{-1} - \mathbf{K}_{x+\eta}^{-1})\, \mathbf{y}. \quad (3.1.6)$$

Обозначив

$$\| h_{ij\eta} \| = \| K_{ij\eta} \|^{-1} = \mathbf{K}_{\eta}^{-1},$$

$$\| h_{ij,\, x+\eta} \| = \| K_{ij,\, x+\eta} \|^{-1} = \mathbf{K}_{x+\eta}^{-1}, \quad (3.1.7)$$

алгоритм (6) можно переписать в виде

$$z = \sum_{i,\, j=1}^{n} (h_{ij\eta} - h_{ij,\, x+\eta})\, y_i y_j. \quad (3.1.8)$$

Итак, оптимальный обнаружитель должен осуществлять весовое суммирование величин $y_i y_j$ согласно (8) (вычислять квадратичную форму) и результат суммирования z сравнивать с порогом h, выбранным по тому или иному критерию. Весовые коэффициенты находятся путем обращения корреляционных матриц.

В том частном случае, когда сигнал и помеха являются некоррелированными процессами, алгоритм (6), (8) упрощается, поскольку корреляционные матрицы становятся диагональными. При этом оптимальная обработка в блоке ОП (рис. 2.1) сводится к суммированию квадратов наблюдаемых величин:

$$z = \sum_{i=1}^{n} y^2{}_i, \quad (3.1.9)$$

т. е. имеем так называемый энергетический приемник.

Рассматриваемые здесь алгоритмы можно использовать, например, при обнаружении флюктуирующих радиоимпульсов на фоне коррелированных помех. В этом случае удобно ввести квадратурные составляющие y_{1i} и y_{2i} наблюдаемого колебания $y(t)$:

$$y_{1i} = \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} y(t) \cos \omega t\, dt,$$

$$i = 1, \ldots n, \quad (3.1.10)$$

$$y_{2i} = \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} y(t) \sin \omega t\, dt,$$

где t_i — момент появления на входе приемника i-го импульса; τ_i — длительность i-го импульса; ω — несущая частота радиоимпульсов; n — число импульсов в пачке. Задача обнаружения пачки из n радиоимпульсов эквивалентна задаче обнаружения квадратурных составляющих y_{1i}, y_{2i}, $i=1, \ldots, n$.

В ряде практически важных случаев совместное распределение составляющих (10) достаточно хорошо описывается гауссовским законом для обеих ситуаций ($\theta=0$, $\theta=1$). При этом элементы корреляционных матриц обладают свойством

$$\begin{gathered} My_{1i}y_{1j}=My_{2i}y_{2j}; \\ My_{1i}y_{2j}=-My_{1j}y_{2i}, \quad i,\ j=1,\dots,n. \end{gathered} \tag{3.1.11}$$

Гауссовское распределение квадратурных составляющих имеет место, например, в некоторых радиолокационных задачах [25], когда радиоимпульсы, принимаемые на фоне пассивных помех (или на фоне собственных шумов), отражаются от цели с большим числом «блестящих» точек. В данном случае оптимальные алгоритмы обнаружения имеют прежний вид (см. (6), (8), (9)); нужно только учесть, что если число импульсов в пачке равно n, то число наблюдаемых величин (10) равно $2n$, при этом порядок кореляционных матриц $\mathbf{K}_\eta$, $\mathbf{K}_{x+\eta}$ равен $2n\cdot 2n$. Например, вместо алгоритма (9) будем иметь

$$z=\sum_{i=1}^{n}(y_{1i}^2+y_{2i}^2). \tag{3.1.12}$$

3.1.2. Непрерывное время. Рассмотрим теперь задачу синтеза, когда гауссовские процессы, являющиеся моделями сигналов и помех, протекают в непрерывном времени. При этом наблюдение также осуществляется непрерывным образом, например, на отрезке [0, T]. Случай, при котором процессы протекают в непрерывном времени, а наблюдение производится в дискретные моменты времени, сводится к задаче, рассмотренной в предыдущем пункте. Заметим, что информация о полезном сигнале x_t, содержащаяся в некотором случайном процессе $\{y_t\}$, при непрерывном наблюдении $\{y_t\}$ используется наиболее полным образом.

Оптимальные алгоритмы обнаружения получим путем предельного перехода в алгоритмах для дискретного времени, устремляя $n\to\infty$, $\Delta=\max(t_{i+1}-t_i)\to 0$, при этом выборка $y(t_1),\dots,y(t_n)$, взятая из случайного процесса $\{y_t\}$ на отрезке $[0, T]$, перейдет в непрерывную реализацию y_0^T. Отношение правдоподобия $\Lambda(y_1^n)$ перейдет в функционал отношения правдоподобия $\Lambda(y_0^T)$. В результате алгоритмы (5), (8) перейдут в интегральные соотношения:

$$\begin{gathered} \Lambda=C\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T[h_\eta(t_1,\ t_2)-h_{x+\eta}(t_1,t_2)]\,y(t_1)\,y\ (t_2)\,dt_1dt_2\right\}, \\ z=\int_0^T\int_0^T[h_\eta(t_1,\ t_2)-h_{x+\eta}(t_1,\ t_2)]\,y(t_1)\,y(t_2)\,dt_1dt_2, \end{gathered} \tag{3.1.13}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от $y(t)$, а $h_\eta(t_1,\ t_2)$, $h_{x+\eta}(t_1,\ t_2)$ — функции, являющиеся непрерывным аналогом матриц (7).

Чтобы получить соотношения, которые позволили бы найти функции h_η и $h_{x+\eta}$, воспользуемся свойством элементов взаимно-обратных матриц:

$$\sum_{j=1}^{n}h_{ij\eta}K_{jm\eta}=\delta_{im}=\begin{cases}1 & \text{при } i=m,\\ 0 & \text{при } i\neq m.\end{cases}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n \longrightarrow \infty$, $\Delta = \max(t_{i+1} - t_i) \longrightarrow 0$, получим интегральное уравнение

$$\int_0^T h_\eta(t_1, \tau) K_\eta(\tau, t_2) d\tau = \delta(t_1 - t_2), \tag{3.1.14}$$

где K_η — корреляционная функция помехи $\{\eta_t\}$, а $\delta(t_1 - t_2)$ — дельта-функция. Аналогично для $h_{x+\eta}$ имеем

$$\int_0^T h_{x+\eta}(t_1, \tau) K_{x+\eta}(\tau, t_2) d\tau = \delta(t_1 - t_2), \tag{3.1.15}$$

где $K_{x+\eta}$ — корреляционная функция смеси сигнала и помехи.

Таким образом, оптимальный обнаружитель должен осуществлять обработку в блоке ОП (см. рис. 2.1) согласно алгоритму (13), при этом

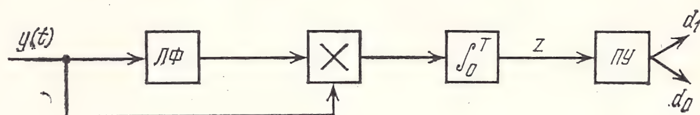


Рис. 3.1

функции весового интегрирования $h_\eta(t_1, t_2)$ и $h_{x+\eta}(t_1, t_2)$ определяются интегральными уравнениями (14), (15). Если положить

$$h(t_1, t_2) = h_\eta(t_1, t_2) - h_{x+\eta}(t_1, t_2),$$

то

$$z = \int_0^T \int_0^T h(t_1, t_2) y(t_1) y(t_2) dt_1 dt_2. \tag{3.1.16}$$

Рассматривая случай (3), когда

$$K_{x+\eta}(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_\eta(t_1, t_2)$$

($K_x(t_1, t_2)$ — корреляционная функция сигнала $\{x_t\}$), из (14), (15) получаем уравнение для $h(t_1, t_2)$:

$$\int_0^T h(t_1, \tau) K_{x+\eta}(\tau, t_2) d\tau = \int_0^T h_\eta(t_1, \tau) K_x(\tau, t_2) d\tau. \tag{3.1.17}$$

Оптимальный обнаружитель в соответствии с (16) можно представить в виде схемы рис. 3.1. Блок ЛФ — линейный фильтр с переменными параметрами, импульсная характеристика $h(t_1, t_2)$ которого определяется уравнениями (17), (14).

Остановимся теперь на том частном случае, когда помеха является белым шумом:

$$K_\eta(t_1, t_2) = N\delta(t_2 - t_1).$$

Тогда из (14) следует, что $h_\eta(t_1, t_2) = \frac{1}{N}\delta(t_1 - t_2)$, при этом (17) будет иметь вид:

$$\int_0^T h(t_1, \tau) K_x(\tau, t_2) d\tau + N h(t_1, t_2) = \frac{1}{N} K_x(t_1, t_2). \tag{3.1.18}$$

Если к тому же и сигнал является дельта-коррелированным процессом

$$K_x = \varkappa\delta(t_2 - t_1),$$

то

$$h(t_1, t_2) = \frac{\varkappa}{N(N+\varkappa)}\,\delta(t_2 - t_1).$$

При этом оптимальный алгоритм (16) приводит к энергетическому приемнику:

$$z = \int_0^T y^2(t)\,dt$$

(константа отброшена).

В заключение отметим, что в общем случае решение интегральных уравнений типа (17), (18) представляет собой весьма сложную задачу. Тем не менее решение их необходимо, так как оно определяет импульсную характеристику $h(t_1, t_2)$ фильтра, без которой нельзя моделировать оптимальный алгоритм (16). Если же обратиться к задаче при дискретном времени, то там сложной в вычислительном отношении является операция обращения корреляционных матриц, см. (7). В последующих главах будут рассмотрены иные методы синтеза, связанные с аппаратом рекуррентных соотношений и дифференциальных уравнений, которые позволят обойти указанные трудности.

3.2. АНАЛИЗ

Перейдем теперь к анализу обнаружителей, при этом ограничимся случаем дискретного времени. Как отмечалось в п. 2.2.7, качество обнаружения удобно описывать вероятностями ложной тревоги α и пропуска сигнала β. Поэтому проводимый ниже анализ будет сводиться к расчету указанных вероятностей, определяющих так называемые характеристики обнаружения.

3.2.1. Оптимальный алгоритм [125]. Согласно (2.2.23), (2.2.24) вероятности α и β для оптимального алгоритма обнаружения, использующего статистику (6), определяются формулами

$$\alpha = \int\limits_{z>h} p(\mathbf{y}\,|\,\theta=0)\,d\mathbf{y}, \qquad \beta = \int\limits_{z<h} p(\mathbf{y}\,|\,\theta=1)\,d\mathbf{y}, \tag{3.2.1}$$

в которые надо подставить (3.1.2)—(3.1.4) и (3.1.6) *). Так как корреляционные матрицы $\mathbf{K}_x$ и $\mathbf{K}_\eta$ положительно определены, то всегда найдется матрица $\mathbf{G}$ такая, что

$$\mathbf{G}^T\mathbf{K}_{x+\eta}\mathbf{G} = \|\mu_j\delta_{ij}\|, \quad \mathbf{G}^T\mathbf{K}_\eta\mathbf{G} = \|\delta_{ij}\|,$$
$$\mu_j > 1, \quad j = 1, \ldots, 2n,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$ — корни уравнения

$$\det(\mathbf{K}_{x+\eta} - \mu\mathbf{K}_\eta) = 0. \tag{3.2.2}$$

*) Расчет будет сделан для случая, когда $\mathbf{y} = (y_{11}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, \ldots, y_{2n})$, где y_{1i}, y_{2i} — гауссовские составляющие (3.1.10).

Используя (1), (3.1.4), (3.1.6), делая замену переменных $\mathbf{y}=(\mathrm{G}^{-1})^T\Xi$, а затем $u_j=\sqrt{1-1/\mu_j}\,\xi_j$, получим

$$\beta=\frac{1}{(2\pi)^n\prod\limits_{j=1}^{2n}(\mu_j-1)^{1/2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{2n}u_j^2<h}\cdots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{u_j^2}{\mu_j-1}\right\}du_1\ldots du_{2n}. \qquad (3.2.3)$$

Аналогично

$$\alpha=\frac{1}{(2\pi)^n\prod\limits_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{2n}u_j^2>h}\cdots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\mu_j}{\mu_j-1}u_j^2\right\}du_1,\ldots du_{2n}. \qquad (3.2.4)$$

Соотношения (3), (4) можно записать в виде

$$\beta=\frac{2}{(2\pi)^n\prod\limits_{j=1}^{2n}(\mu_j-1)^{1/2}}\int\limits_0^h r\,dr\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(r^2-\sum_{j=1}^{2n}u_j^2\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{u_j^2}{\mu_j-1}\right\}du_1\ldots du_{2n}, \qquad (3.2.5)$$

$$\alpha=\frac{2}{(2\pi)^n\prod\limits_{j=1}^{2n}\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}}\int\limits_h^{\infty} r\,dr\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(r^2-\sum_{j=1}^{2n}u_j^2\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\mu_j}{\mu_j-1}u_j^2\right\}du_1\ldots du_{2n}.$$

Для дальнейших расчетов воспользуемся интегральным представлением дельта-функции:

$$\delta\left(r^2-\sum_{j=1}^{2n}u_j^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\theta\left(r^2-\sum_{j=1}^{2n}u_j^2\right)\right\}d\theta. \qquad (3.2.6)$$

Подставляя (6) в (5) и интегрируя по $u_1, \ldots, u_{2n}$, получим

$$\beta = \frac{1}{2^n \pi \prod_{j=1}^{2n} (\mu_j - 1)^{1/2}} \int_0^h r dr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\theta r^2)}{\prod_{j=1}^{2n} \left[\frac{1}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]^{1/2}} d\theta,$$

(3.2.7)

$$\alpha = \frac{1}{2^n \pi \prod_{j=1}^{2n} \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)^{1/2}} \int_h^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\theta r^2)}{\prod_{j=1}^{2n} \left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]^{1/2}} d\theta.$$

Корни уравнения (2) совпадают с собственными значениями матрицы $\mathbf{K}_\eta^{-1/2} \mathbf{K}_{x+\eta} \mathbf{K}_\eta^{-1/2}$. Эта матрица обладает тем же свойством, что и матрицы $\mathbf{K}_{x+\eta}$, $\mathbf{K}_\eta$, для которых выполняются условия (3.1.11). Отсюда вытекает [115], что значения μ_j, $j=1, \ldots, 2n$, четнократны: $\mu_j = \mu_{n+j}$, $j=1, \ldots, n$. Благодаря этому соотношения (7) упрощаются, что позволяет взять интегралы.

Разложим подынтегральные выражения в (7)

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]}, \quad \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j - 1)} - i\theta\right]}$$

на простейшие дроби, а затем проинтегрируем по θ и r. Предположив, что все μ_j, $j=1, \ldots, n$ различны, получим окончательные соотношения

$$\beta = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} (\mu_j - 1)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j - 1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(\frac{1}{\mu_l - 1} - \frac{1}{\mu_j - 1}\right)} \left\{1 - \exp\left[-\frac{h^2}{2(\mu_j - 1)}\right]\right\},$$

(3.2.8)

$$\alpha = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - \frac{1}{\mu_j}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(\frac{\mu_l}{\mu_l - 1} - \frac{\mu_j}{\mu_j - 1}\right)} \exp\left[-\frac{h^2 \mu_j}{2(\mu_j - 1)}\right].$$

В случае кратных значений μ_j, $j=1, \ldots, n$ расчетные формулы для β, α существенно усложняются. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ — корни уравнения (2) с кратностями $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_k$, так что $\sum_{l=1}^{k} a_l = n$. Используя метод

[72], разложим подынтегральные выражения в (7) на простые дроби и затем проинтегрируем по θ. В результате получим

$$\beta = \frac{1}{2^n \prod_{l=1}^{k} (\mu_l - 1)^{a_l}} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_l} C'_{ml} \gamma \left[m, \frac{h^2}{2(\mu_l - 1)} \right],$$

$$\alpha = \frac{1}{2^n \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\mu_l}\right)^{a_l}} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_l} C''_{ml} \Gamma \left[m, \frac{h^2 \mu_l}{2(\mu_l - 1)} \right], \quad (3.2.9)$$

где

$$\gamma(m, x) = \int_0^x \exp(-t)\, t^{m-1} dt = (m-1)! \left[1 - \exp(-x) \sum_{q=0}^{m-1} \frac{x^q}{q!} \right],$$

$$\Gamma(m, x) = \int_x^\infty \exp(-t)\, t^{m-1} dt = (m-1)! \exp(-x) \sum_{q=0}^{m-1} \frac{x^q}{q!},$$

$$C'_{ml} = \frac{(-1)^{m-a_l} 2^m (\mu_l - 1)^m}{(a_l - m)!\,(m-1)!\,\mu_l^m} \times$$

$$\times \frac{d^{a_l - m}}{dp^{a_l - m}} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k} \left[\frac{1}{2(\mu_j - 1)} - p \right]^{a_j}} \right]_{p = \frac{1}{2(\mu_l - 1)}},$$

$$C''_{ml} = \frac{(-1)^{m-a_l} 2^m (\mu_l - 1)^m}{(a_l - m)!\,(m-1)!\,\mu_l^m} \times$$

$$\times \frac{d^{a_l - m}}{dp^{a_l - m}} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{k} \left[\frac{\mu_j}{2(\mu_j - 1)} - p \right]^{a_j}} \right]_{p = \frac{\mu_l}{2(\mu_l - 1)}}.$$

Найденные формулы (8), (9) для вероятностей пропуска сигнала и ложной тревоги при оптимальном обнаружении коррелированных сигналов на фоне коррелированных помех носят довольно общий характер. Из них непосредственно вытекают соответствующие соотношения для более простых задач: для случая оптимального обнаружения коррелированного сигнала в некоррелированном шуме и т. д.

Так, например, в случае некоррелированного шума имеем $K_\eta = \sigma^2_\eta \| \delta_{ij} \|$, где σ^2_η — дисперсия шума. Если предположить, что компоненты y_{1i} и y_{2i} (3.1.10) независимы, то

$$K_x = \begin{Vmatrix} K'_x & 0 \\ 0 & K'_x \end{Vmatrix}, \quad K'_x = \sigma^2_x \| R_{ij} \|, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где σ^2_x — дисперсия сигнала; R_{ij} — коэффициент корреляции сигнала. Из (3.1.3) и (2) следует, что для этого случая в формулах (8) нужно положить $\mu_j = q\lambda_j + 1$, где $q = \sigma^2_x / \sigma^2_\eta$ — отношение сигнал/шум; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $\|R_{ij}\|$. Для дальнейшего расчета необходимо в соответствии с известной корреляционной функцией сигнала задать конкретный вид матрицы $\|R_{ij}\|$ и вычислить ее собственные значения. Их можно находить с помощью ЦВМ по стандартным программам. Иногда при вычислении собственных значений матрицы используются и аналитические методы (см. пример в следующем пункте).

3.2.2. Неоптимальный алгоритм. Проведем теперь анализ алгоритма (3.1.12). Как было выяснено, этот алгоритм является оптимальным в случае некоррелированных сигналов и помех. Однако, если помеха или сигнал (или оба вместе) являются коррелированными процессами (что обычно и бывает на практике), то алгоритм (3.1.12) будет неоптимальным. В то же время данный алгоритм более прост в технической реализации по сравнению с (3.1.8), при этом он часто используется на практике. В силу указанных причин анализ алгоритма (3.1.12) в условиях воздействия коррелированных процессов является актуальным.

а) Вероятности пропуска сигнала β и ложной тревоги α для обнаружителя (3.1.12) при воздействии на него коррелированных помех и сигналов с распределениями (3.1.2), (3.1.4) отыскиваются по прежним формулам (1). Нужно только учесть, что величина z, определяющая области интегрирования в (1), задается теперь соотношением (3.1.12). Используя прежнюю методику вычисления интегралов, получаем [125]

$$\beta = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} \nu_j} \sum_{j=1}^{n} \frac{\nu_j}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \left(\frac{1}{\nu_l} - \frac{1}{\nu_j}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{2\nu_j}\right)\right],$$

$$\alpha = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varkappa_j}{\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \left(\frac{1}{\varkappa_l} - \frac{1}{\varkappa_j}\right)} \exp\left(-\frac{h^2}{2\varkappa_j}\right), \qquad (3.2.10)$$

где $\nu_j = \nu_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$ — собственные значения матрицы $\mathbf{K}_{x+\eta}$, $\varkappa_j = \varkappa_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$ — собственные значения матрицы $\mathbf{K}_\eta$.

б) Изложенная выше методика отыскания вероятностей α и β не единственна. Вместо того, чтобы вычислять многократные интегралы (1), можно использовать однократное интегрирование типа (2.2.25), а распределение статистики на входе порогового устройства находить в результате аппроксимации, например значения рядом Эджворта. Проиллюстрируем эту методику на примере анализа алгоритма типа (3.1.12), который запишем в виде

$$z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Рассмотрим практически интересный случай обнаружения пачки из n некогерентных флюктуирующих радиоимпульсов в некоррелированном шуме, при этом будем считать, что y_i — огибающая колебания на выходе узкополосного фильтра в i-м такте.

Случайная величина y_i распределена при $\theta=0$ по закону Релея

$$p(y_i \mid \theta=0)=y_i \exp(-y_i^2/2),$$

а при $\theta=1$ по закону Райса

$$p(y_i \mid \theta=1)=y_i \exp(-y_i^2/2-r_i) I_0(\sqrt{2r_i}\, y_i),$$

где r_i — отношение сигнал/шум по мощности, I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Рассматривая случай флюктуирующих (федингующих) радиоимпульсов, предположим, что случайную величину r_i можно представить в виде

$$r_i=\sum_{k=1}^{N} u_{ki}^2, \quad i=1, \ldots, n, \tag{3.2.11}$$

где компоненты u_{ki} независимы по k и имеют гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией q. Такая запись означает, что плотность вероятностей $p(r_i)$ является χ^2-распределением с N степенями свободы. При $N=2$ будем иметь встречающийся на практике случай (при обнаружении сложных целей) релеевского распределения амплитуд отраженного сигнала (релеевский фединг).

Вероятности ложной тревоги α и правильного обнаружения D определяются соотношениями

$$\alpha=\int_h^{\infty} p(z \mid \theta=0)\, dz, \qquad D=\int_h^{\infty} p(z \mid \theta=1)\, dz.$$

Так как рассматривается случай гауссовского некоррелированного шума, то плотность вероятностей $p(z|\theta=0)$ находится довольно легко; в результате n-кратного свертывания распределения огибающей шума на выходе квадратора:

$$p(z \mid \theta=0)=\frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \exp(-z). \tag{3.2.12}$$

Значительно сложнее обстоит дело с нахождением $p(z|\theta=1)$. Отыскивая преобразование Лапласа

$$Q(p)=\int_0^{\infty} p(z \mid \theta=1) \exp(-pz)\, dz,$$

получим

$$Q(p)=\frac{1}{(1+p)^n}\left[\det\left(\mathbf{I}+\frac{2p}{1+p}\mathbf{K}\right)\right]^{-N/2}, \tag{3.2.13}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица; $\mathbf{K}$ — корреляционная матрица гауссовских векторов $(u_{k1}, \ldots, u_{kn})$; $\mathbf{K}=\|\mathbf{M} u_{ki} u_{kj}\|$; $i, j=1, \ldots, n$; $k=1, \ldots, N$.

Применяя затем обратное преобразование Лапласа, в принципе можно было бы найти $p(z|\theta=1)$. Однако мы здесь пойдем по другому пути, который быстрее приведет к конкретным результатам.

Аппроксимируем плотность $p(z|\theta=1)$ рядом Эджворта [57], причем для повышения точности аппроксимации возьмем семь членов ряда.

Чтобы записать ряд, нужно вначале найти семиинварианты L_m распределения $p(z|\theta=1)$. Для этого, воспользовавшись разложением

$$\det(\mathbf{I}+\mu\mathbf{K})=\exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\mu^m\mathbf{T}_m\right),$$

где $\mathbf{T}_m$ — след матрицы $\mathbf{K}^m$, представим характеристическую функцию (13) в виде

$$Q(p)=\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m p^m}{m}n+\frac{N}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^m}{m}\left(\frac{p}{1+p}\right)^m\mathbf{T}_m\right]. \qquad (3.2.14)$$

Учитывая, что семиинварианты L_m являются коэффициентами разложения характеристической функции в степенной ряд вида

$$Q(p)=\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L_m}{m!}(-p)^m\right]$$

и что

$$p/(1+p)=p-p^2+p^3-p^4+\ldots,$$

из (14) получим семиинварианты искомого распределения.

При $N=2$ имеем

$$\begin{aligned} &L_1=n+2T_1,\; L_2=n+4T_1+4T_2,\\ &L_3+2!\,(n+6T_1+12T_2+8T_3),\\ &L_4=3!\,(n+8T_1+24T_2+32T_3+16T_4),\\ &L_5=4!\,(n+10T_1+40T_2+80T_3+80T_4+32T_5). \end{aligned} \qquad (3.2.15)$$

При $N\neq 2$ значения семиинвариантов можно получить из (15), умножив коэффициенты при T_m на $N/2$. Обозначим $y=(z-L_1)/L_2^{1/2}$ (L_1, L_2 — среднее значение и дисперсия z при $\theta=1$). Тогда ряд Эджворта для плотности вероятностей величины y можно записать в виде

$$p(y|\theta=1)\approx\varphi(y)-\frac{L_3}{3!L_2^{3/2}}\varphi^{(3)}(y)+\frac{L_4}{4!L_2^2}\varphi^{(4)}(y)+\frac{L_3^2}{72L_2^3}\varphi^{(6)}(y)-$$
$$-\frac{L_5}{5!L_2^{5/2}}\varphi^{(5)}(y)-\frac{L_3L_4}{144L_2^{7/2}}\varphi^{(7)}(y)+\frac{L_3^3}{6^4L_2^{9/2}}\varphi^{(9)}(y), \qquad (3.2.16)$$

где

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right);\qquad \varphi^{(\nu)}(y)=\frac{d^\nu}{dy^\nu}\varphi(y).$$

При этом вероятность правильного обнаружения определяется соотношением

$$D=\int_{(h-L_1)/L_2^{1/2}}^{\infty}p(y|\theta=1)\,dy. \qquad (3.2.17)$$

Поскольку

$$T_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda^m{}_i, \tag{3.2.18}$$

где λ_i — собственные значения матрицы **К**, то дальнейший расчет сводится к нахождению λ_i. Для этого необходимо конкретизировать корреляционную матрицу **К**.

Рассмотрим случай, когда компоненты отношения сигнал/шум u_{ki} имеют экспоненциальную функцию корреляции, при этом матрицу К можно представить в виде

$$\text{К} = q \begin{Vmatrix} 1, & R, & R^2, & \ldots, & R^{n-1} \\ R, & 1, & R, & \ldots, & R^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R^{n-1} & R^{n-2}, & R^{n-3}, & \ldots, & 1 \end{Vmatrix}, \tag{3.2.19}$$

где $R = \exp(-T/\tau_k)$; T — период повторения импульсов; τ_k — время корреляции компоненты федингующего отношения сигнал/шум.

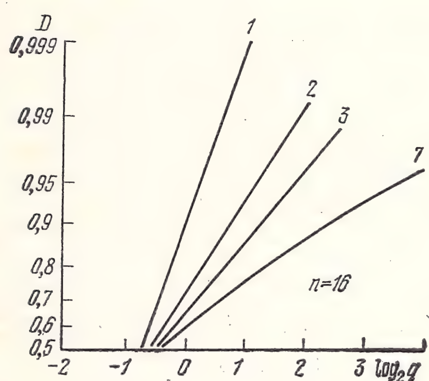


Рис. 3.2

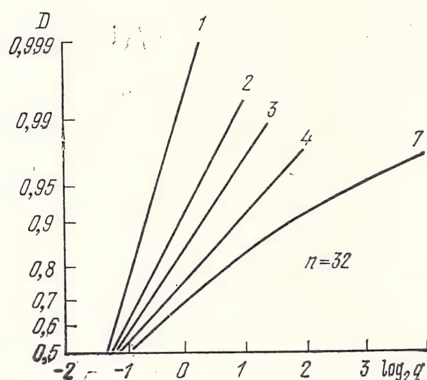


Рис. 3.3

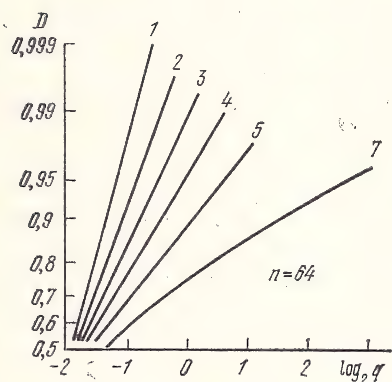


Рис. 3.4

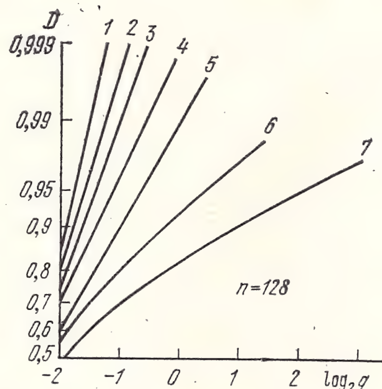


Рис. 3.5

В результате решения уравнения в конечных разностях [3] найдем соотношения для собственных значений матрицы (19)

$$\lambda_i = q(1-R^2)/(1+R^2-2R\cos\psi_i), \tag{3.2.20}$$

где ψ_i — корни трансцендентного уравнения

$$n\psi_i - \operatorname{arctg}\frac{(1+R^2)\cos\psi_i - 2R}{(1-R^2)\sin\psi_i} = \frac{\pi}{2}(2i-1); \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.2.21}$$

Используя (12), (15), (16)—(18), (20), (21), таблицы функции ошибок и ее производных [167] и таблицы значений порога h [162], можно рассчитать характеристики обнаружения при различных соотношениях между временем корреляции фединга и периодом повторения радиоимпульсов.

На рис. 3.2—3.5 приведены характеристики обнаружения для случая*) $\alpha=10^{-4}$. Номера кривых соответствуют значениям параметра τ_k из табл. 3.1. По оси абсцисс отложен двоичный логарифм параметра q, который имеет смысл половины среднего отношения сигнал/шум по мощности.

Таблица 3.1

№	1	2	3	4	5	6	7
τ_k	0	$8T$	$16T$	$32T$	$64T$	$128T$	∞

Отметим, что характеристики обнаружения для крайних случаев — быстрого и медленного фединга (кривые *1* и *7* соответственно) рассчитаны по точным формулам [14] с использованием таблиц неполной гамма-функции [87]. Кроме того, кривая *1* рассчитывалась и по приближенной формуле (17), (16). Сравнение результатов показало, что ошибка аппроксимации в этом случае при большом n составляет приблизительно 10^{-4}.

Глава 4

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБНАРУЖЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Рассматриваются методы синтеза оптимальных систем обнаружения, решающих одновременно и задачи оценивания (фильтрации). Полезный сигнал представляет собой заданую функцию марковского процесса, который может быть одномерным и многомерным, гауссовским и негауссовским, с дискретным и непрерывным временем, с дискретным и непрерывным фазовым пространством. В качестве помех рассматривается случайный процесс с независимыми значениями (дискретное время), описываемый, возможно, негауссовским распределением вероятностей, и белый гауссовский шум (непрерывное время).

Общие методы, излагаемые в § 4.1 и 4.2, иллюстрируются в § 4.3 на конкретных примерах.

---

*) Более полные результаты расчета приведены в [3] и [2, гл. 7]. В этих работах содержатся и некоторые подробности (опущенные здесь) рассмотренного метода.

4.1. ОБЩИЕ АЛГОРИТМЫ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ)

4.1.1. Предварительная постановка задачи. Предположим, что в моменты времени $t_1 < \ldots t_i < \ldots < t_n$ наблюдается последовательность случайных величин $y(t_1), \ldots, y(t_i), \ldots, y(t_n)$, при этом возможны две ситуации:

$$y(t_i) \equiv y_i = \theta S(x_i, t_i) + \xi_i, \quad \theta = 0, 1 \ (i = 1, \ldots, n). \qquad (4.1.1)$$

Здесь $S(x_i, t_i)$ представляет собой полезный сигнал, где S — заданная (известная) функция, а x_i — случайные величины, образующие простой марковский процесс $\{x_i\}$ с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством (см. п. 1.2.3). Переходную плотность вероятностей этого процесса обозначим через $\pi_{i+1}(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i)$, а начальную плотность через $\pi_1(x_1, t_1)$. Случайные величины ξ_i интерпретируются как шум, они образуют процесс с независимыми значениями $\{\xi_i\}$, описываемый плотностью вероятностей ρ_i (ξ_i, t_i) $(i=1, \ldots, n)$. Параметр θ по-прежнему характеризует ситуации наличия $(\theta=1)$ и отсутствия $(\theta=0)$ полезного сигнала. При рассмотрении задачи в байесовской постановке параметр θ — случайная величина с распределением (2.2.2).

Так как распределение вероятностей сигнала и шума предполагаются известными, то оптимальная процедура обнаружения при фиксированном времени наблюдения будет сводиться к формированию ОП (2.2.36) и сравнению его с некоторым порогом.

Конкретизируя формулу (2.2.18) для рассматриваемой задачи, получим

$$\Lambda_n = \frac{\int \ldots \int\limits_X \prod\limits_{i=1}^{n} \rho_i \left[y_i - s(x_i, t_i), t_i\right] \prod\limits_{i=1}^{n-1} \pi(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i)\, \pi_1(x_1, t_1)\, dx_1 \ldots dx_n}{\prod\limits_{e=1}^{n} \rho_i(y_i, t_i)} \qquad (4.1.2)$$

(интегрирование осуществляется по всей области X определения вектора $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n) \in X$, в дальнейшем при записи подобных интегралов области интегрирования выписываться не будут).

Соотношение (2) определяет ОП и тем самым в принципе решает задачу синтеза оптимального обнаружителя. Однако способ формирования ОП по формуле (2) не эффективен. В частности, он просто не позволяет найти ОП из-за невозможности (в большинстве случаев) взять n-кратный интеграл. Трудно представить и какой-либо удовлетворительный способ моделирования (2).

Ниже излагаются рекуррентные методы нахождения ОП, которые обладают существенным преимуществом по сравнению с алгоритмом (2) в смысле вычисления и моделирования. Важно также, что они устанавливают функциональную связь ОП с апостериорным распределением сигнала, давая методы совместного обнаружения и фильтрации. Последние, как мы увидим, приведут к ряду благоприятных результатов.

4.1.2 Рекуррентные алгоритмы для отношения правдоподобия и для апостериорной плотности вероятностей [126]. Рассмотрим слу-

чайный вектор $(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}, \theta)$, где $x_1^{k+1}=(x_1, ..., x_{k+1}), y_1^{k+1}=(y_1, ... y_{k+1})$. Совместная плотность вероятностей составляющих этого вектора

$$p(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}, \theta) = p_1 \prod_{i=1}^{k+1} \rho[y_i - S(x_i)] \pi(x_1) \prod_{i=1}^{k} \pi(x_{i+1} | x_i) \delta(\theta - 1) + $$
$$+ p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \rho(y_i) \prod_{i=1}^{k+1} \delta(x_i) \delta(\theta), \quad (4.1.3)$$

где δ — дельта-функция (для сокращения записи будем опускать параметр t_i, а также индекс i при функциях π_i, ρ_i). Пользуясь этим выражением, можно найти апостериорную плотность

$$p(x_1^{k+1}, \theta | y_1^{k+1}) = \frac{p(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}, \theta)}{p(y_1^{k+1})},$$

где

$$p(y_1^{k+1}) = \int ... \int p(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}, \theta) dx_1 ... dx_{k+1} d\theta.$$

Так как случайная величина θ является дискретной, то для нее удобно записывать апостериорное распределение в рамках «вероятности» (а не «плотности»). При этом смешанное апостериорное распределение $p(x_1^{k+1}, \theta | y_1^{k+1})$. представим в виде

$$p(x_1^{k+1}, \theta | y_1^{k+1}) =$$
$$= \frac{1}{p(y_1^{k+1})} \begin{cases} p_1 \prod_{i=1}^{k} \rho[y_i - S(x_i)] \pi(x_1) \prod_{i=1}^{k-1} \pi(x_{i+1} | x_i) \times \\ \times \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k), \quad \text{при } \theta = 1; \\ p_0 \prod_{i=1}^{k} \rho(y_i) \prod_{i=1}^{k} \delta(x_i) \rho(y_{k+1}) \delta(x_{k+1}), \quad \text{при } \theta = 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Учитывая, что

$$p(y_1^{k+1}) = p(y_{k+1} | y_1^k) p(y_1^k),$$

$$p(x_1^k, \theta | y_1^k) = \begin{cases} p(x_1^k, \theta = 1 | y_1^k), & \text{при } \theta = 1, \\ p(x_1^k, \theta = 0 | y_1^k), & \text{при } \theta = 0, \end{cases}$$

перепишем (4) следующим образом:

$$p(x_1^{k+1}, \theta | y_1^{k+1}) =$$
$$= \frac{1}{p(y_{k+1} | y_1^k)} \begin{cases} p(x_1^k, \theta = 1 | y_1^k) \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k), & \text{при } \theta = 1, \\ p(x_1^k, \theta = 0 | y_1^k) \rho(y_{k+1}) \delta(x_{k+1}), & \text{при } \theta = 0. \end{cases}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по $x_1, ..., x_{k-1}$:

$$p(x_{k+1}, x_k, \theta | y_1^k) =$$
$$= \frac{1}{p(y_{k+1} | y_1^k)} \begin{cases} p(x_k, \theta = 1 | y_1^k) \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k), & \text{при } \theta = 1, \\ p(x_k, \theta = 0 | y_1^k) \rho(y_{k+1}) \delta(x_{k+1}), & \text{при } \theta = 0. \end{cases}$$

(4.1.5)

Входящее сюда апостериорное распределение $p(x_k, \theta | y_1^k)$ представим в виде

$$p(x_k, \theta | y_1^k) = \begin{cases} p(x_k | \theta = 1, y_1^k) P(\theta = 1 | y_1^k), & \text{при } \theta = 1, \\ p(x_k | \theta = 0, y_1^k) P(\theta = 0 | y_1^k), & \text{при } \theta = 0. \end{cases} \qquad (4.1.6)$$

В дальнейшем особую роль будет играть плотность $p(x_k | \theta = 1, y_1^k)$ — апостериорная плотность вероятностей (АПВ) параметра x_k сигнала $S(x_k)$ при условии, что он присутствует в наблюдаемом процессе. Введем для нее специальное обозначение $w_k(x_k) = p(x_k | \theta = 1, y_1^k)$.

Что же касается $p(x_k | \theta = 0, y^k{}_1)$, то можно положить

$$p(x_k | \theta = 0, y^k{}_1) = \delta(x_k) \qquad (4.1.7)$$

(состояние $\theta = 0$ ассоциируем с $S(x_k) \equiv 0$, $x_k \equiv 0$). В формулу (6) входят также апостериорные вероятности наличия и отсутствия сигнала в наблюдаемом процессе; обозначим их отношение

$$l_k = \frac{P(\theta = 1 | y_1^k)}{P(\theta = 0 | y_1^k)}. \qquad (4.1.8)$$

Так как

$$P(\theta = 1 | y_1^k) + P(\theta = 0 | y_1^k) = 1,$$

то

$$P(\theta = 1 | y_1^k) = \frac{l_k}{1 + l_k}; \quad P(\theta = 0 | y_1^k) = \frac{1}{1 + l_k}. \qquad (4.1.9)$$

Учитывая введенные обозначения и формулы (7), (9), представим (6) в виде

$$p(x_k, \theta | y_1^k) = \begin{cases} \dfrac{l_k}{1 + l_k} w_k(x_k) & \text{при } \theta = 1, \\ \dfrac{1}{1 + l_k} \delta(x_k) & \text{при } \theta = 0. \end{cases}$$

Подставляя это соотношение в (5) и затем интегрируя по x_k, получим

$$p(x_{k+1}, \theta | y_1^{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{p(y_{k+1} | y^k{}_1)} \begin{cases} \dfrac{l_k}{1 + l_k} \displaystyle\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k & \text{при } \theta = 1, \\ \dfrac{1}{1 + l_k} \rho(y_{k+1}) \delta(x_{k+1}) & \text{при } \theta = 0. \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

Отношение апостериорных вероятностей l_{k+1} равно

$$l_{k+1} = \frac{\int p(x_{k+1}, \theta = 1 | y_1^{k+1}) dx_{k+1}}{\int p(x_{k+1}, \theta = 0 | y_1^{k+1}) dx_{k+1}}.$$

Подставляя в это выражение формулу (10), найдем

$$l_{k+1} = l_k \frac{1}{\rho(y_{k+1})} \int\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1},$$
$$k = 1, 2, \ldots, n - 1. \qquad (4.1.11)$$

Так как

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{p(x_{k+1}, \theta = 1 \mid y_1^{k+1})}{\int p(x_{k+1}, \theta = 1 \mid y_1^{k+1})\, dx_{k+1}},$$

то, используя (10), получим рекуррентное соотношение для АПВ:

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k}{\int\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k dx_{k+1}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (4.1.12)$$

Отношение правдоподобия Λ_k связано с l_k (8) выражением

$$\Lambda_k = \frac{p_0}{p_1} l_k. \qquad (4.1.12')$$

Поэтому для ОП имеем тот же самый (11) рекуррентный алгоритм

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k \frac{1}{\rho(y_{k+1})} \int\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k dx_{k+1},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (4.1.13)$$

Отличие заключается лишь в начальных условиях:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\rho(y_1)} \int \rho[y_1 - S(x_1)]\, \pi(x_1)\, dx_1,$$

$$l_1 = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_1. \qquad (4.1.14)$$

Начальное условие для (12) имеет вид

$$w_1(x_1) = \frac{\rho[y_1 - S(x_1)]\, \pi(x_1)}{\int \rho[y_1 - S(x_1)]\, \pi(x_1)\, dx_1}. \qquad (4.1.14')$$

Рекуррентные алгоритмы (12) и (13) позволяют находить ОП поэтапно, вычисляя w_1, Λ_1, w_2, Λ_2, ..., w_n, Λ_n.

Отметим, что соотношение (13) тесно связано с (12), а само ОП— с АПВ $w_k(x_k)$:

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k I_{k+1}[y_{k+1}, w_k(x_k)] \qquad (4.1.15)$$

(оператор I_{k+1} определяется согласно (13)).

4.1.3. Оценки и псевдооценки. Полученные рекуррентные соотношения дают алгоритмы не только для нахождения ОП. Одно из них — (12) — описывает также эволюцию АПВ $w_k(x_k)$ параметра x_k полезного сигнала $S(x_k, t_k)$, которая определяет оптимальные оценки.

Задав функцию потерь $c(x_k, d_k)$, зная $w_k(x_k)$, можно найти байесовскую оценку (см. п. 2.3.2)

$$d^*_k = \delta^*(y_1, \ldots, y_k) \qquad (4.1.16)$$

сигнала или его параметра в результате минимизации апостериорного риска

$$M[c(x_k, \delta y_1^k) \mid y_1^k, \theta = 1] = \int c(x_k, y^k{}_1)\, w_k(x_k)\, dx_k$$

по δ. При квадратичной (относительно параметра) функции потерь

$$c(x_k, d_k) = (x_k - d_k)^2$$

имеем согласно (2.3.4) БСО параметра x_k:

$$d^*_k = M(x_k | y_1^k, \ \theta=1) = \int x_k w_k(x_k)\, dx_k \equiv \widehat{x}_k. \tag{4.1.17}$$

Если же

$$c(x_k, d_k) = [S(x_k) - d_k]^2,$$

то

$$d^*_k = M[S(x_k) | y_1^k, \theta=1] = \int S(x_k) w_k(x_k)\, dx_k \equiv \widehat{S}_k \tag{4.1.18}$$

— БСО сигнала $S(x_k)$.

В рассматриваемых здесь задачах оценки типа $\hat{x}_k$ случайного процесса $\{x_k\}$ формируются последовательно ($k=1, 2, \ldots$) в конечных точках отрезка наблюдения $[t_1, t_k]$ и являются оценками фильтрации или фильтрационными оценками*). Они определяются АПВ $w_k(x_k)$, описываемой рекуррентным соотношением (12). Выражение (12), составляющее основу для синтеза оптимальных алгоритмов фильтрации (вообще говоря, нелинейной) можно назвать рекуррентным соотношением (алгоритмом)оптимальной фильтрации.

Отметим, что оценки (16)—(18) отыскиваются при условии, что оцениваемый сигнал присутствует в y_1^k, т. е. при ситуации $\theta=1$.

Одна из особенностей решаемых здесь задач обработки сигналов связана с тем, что возникает необходимость рассматривать статистику $\delta^*(y_1^k)$ (16) при отсутствии в y_1^k полезного сигнала, т. е. при $\theta=0$. Статистику (16), являющуюся байесовской оценкой сигнала (или параметра) в случае $\theta=1$, назовем псевдооценкой, если имеет место ситуация $\theta=0$. В частности, статистики (17) и (18) будут псевдооценками, если в $\widehat{x}_k(y_1^k)$ и $\widehat{S}_k(y_1^k)$ вместо наблюдаемой реализации y_1^k при $\theta=1$ подставить y_1^k при $\theta=0$. Появление понятия псевдооценки обязано тому, что одновременно с задачей фильтрации сигнала $S(x_k)$ мы рассматриваем и задачу его обнаружения, при которой полезного сигнала может и не быть.

4.1.4. Достаточные статистики. Определим достаточные статистики $\mathbf{w}_k$ как некоторые функции наблюдаемой реализации процесса $\{y_i\}$, при которых имеет место равенство (с вероятностью 1) апостериорных рисков:

$$M[c(x_k, \delta(y_1^k)) | y_1^k, \theta=1] = M[c(x_k, \delta(y_1^k)) | \mathbf{w}_k, \theta=1]. \tag{4.1.19}$$

Это соотношение будет справедливо, если равны апостериорные распределения:

$$w_k(x_k) \equiv p(x_k | y_1^k, \theta=1) = p(x_k | \mathbf{w}_k, \theta=1). \tag{4.1.20}$$

Достаточными статистиками, очевидно, являются и сами наблюдаемые значения $y_1^k \in \Gamma$. Однако в ряде случаев существует более компактное разбиение пространства наблюдений Γ. При этом достаточные статистики позволяют осуществить редукцию (сокращение) пространства Γ без изменения величины апостериорного риска и без ограничения пространства решающих функций. Достаточная статистика $\mathbf{w}_k$ называется минимальной, если нельзя провести дальнейшую редукцию, не нарушая равенство (19) или (20).

*) Далее (гл. 11) рассматриваются интерполяционные и экстраполяционные оценки.

Условное математическое ожидание (19) представляет собой апостериорный риск, соответствующий решению $d_k=\delta(y_1^k)$, $k=1, 2, \ldots$, которое является фильтрационной оценкой процесса x_k. Поэтому достаточные статистики $\mathbf{w}_k$, определяемые равенством (19) или (20), назовем достаточными статистиками фильтрации. Используя достаточные статистики $\mathbf{w}_k$, рекуррентный алгоритм оптимальной фильтрации (12) можно представить в виде:

$$\mathbf{w}_{k+1}=J_{k+1}(y_{k+1}, \mathbf{w}_k). \qquad (4.1.21)$$

Оператор J_{k+1} определяется на основании (12), (20), при этом он зависит от конкретных статистических свойств сигнала и шума.

Обратимся теперь к задаче обнаружения, когда выносится решение $\delta(y_1^k)$, равное d_0 или d_1, относительно параметра $\theta=0,1$. Аналогично предыдущему можно определить достаточные статистики обнаружения Λ_k, при которых

$$M[c(\theta, \delta(y_1^k))\,|\,y_1^k]=M[c(\theta,\delta(y_k^k))\,|\,\Lambda_k]$$

или

$$P(\theta\,|\,y_1^k)=P(\theta\,|\,\Lambda_k). \qquad (4.1.22)$$

Из (22) и (9) следует, что достаточной статистикой обнаружения является отношение апостериорных вероятностей l_k (8), а в силу (12) и ОП: $\mathbf{\Lambda}_k=\Lambda_k$.

Достаточная статистика $\Lambda_k=\Lambda_k(y_1^k)$ (или $l_k=l_k(y_1^k)$) позволяет свести k-мерный наблюдаемый вектор y_1^k к скалярной величине Λ_k. Дальнейшая редукция без потери свойства достаточности (22), очевидно, невозможна. Поэтому ОП является минимальной достаточной статистикой обнаружения.

Рассмотрим теперь статистику $(\Lambda_k, \mathbf{w}_k)$, где Λ_k — ОП, а $\mathbf{w}_k$ определяется согласно (20). Из вышеизложенного следует, что эта статистика является достаточной статистикой обнаружения и фильтрации. Рекуррентный алгоритм (13) в пространстве достаточных статистик примет вид:

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k I'_{k+1}(y_{k+1}, \mathbf{w}_k). \qquad (4.1.23)$$

Отметим, что оператор I'_{k+1} отличается от I_{k+1} (15); в частности, I'_{k+1} не содержит операции интегрирования по x.

4.1.5. Структура системы совместного обнаружения и фильтрации. Обратим внимание на следующее. Если рекуррентные алгоритмы (12), (21) можно применять (для задачи фильтрации) независимо от (13), (23), то алгоритмы (13), (23) невозможно использовать независимо от (12), (21). Только совместное решение рекуррентных уравнений (12), (13) или (21), (23) позволяет найти ОП и тем самым решить задачу синтеза оптимального обнаружителя. При этом система, моделирующая данные алгоритмы, наряду с обнаружением будет осуществлять оптимальную (линейную или нелинейную) фильтрацию сигналов и (или) их параметров. Причем фильтрация (оценивание) будет происходить как до, так и после установления факта обнаружения сигналов. В соответствии с указанными обстоятельствами соотношения (12), (13) и (21), (23) называем рекуррентными алгоритмами совместного обнаружения и фильтрации.

На рис. 4.1 представлена структурная схема синтезированной системы совместного обнаружения и фильтрации сигналов. Структура

блока ОФ — блока оптимальной фильтрации — определяется алгоритмами (13) или (21), а структура ОП — блока формирования отношения правдоподобия — алгоритмами (13) или (23). Согласно рекуррентному характеру этих алгоритмов блоки охвачены обратной связью с задержкой на период $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ поступления наблюдаемых данных. Блок включения В в конечный момент времени t_n пропускает значение Λ_n на пороговое устройство ПУ, где в результате сравнения Λ_n с порогом h выносится одно из двух решений: d_1 (есть сигнал) или d_0 (нет сигнала). Величина h определяется выбранным критерием оптимальности.

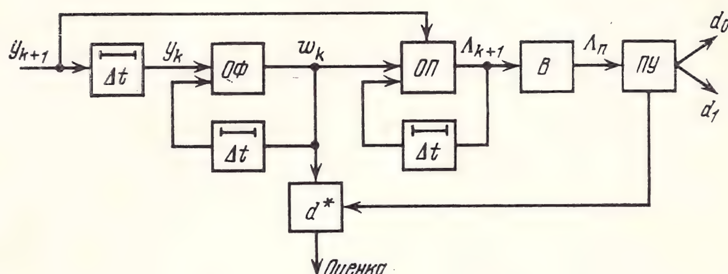


Рис. 4.1

На выходе блока d^* формируются оптимальные оценки сигнала и его параметра. Если блок ОФ смоделирован согласно (12), то блок d^* должен включать операции типа (17), (18). Если же моделируется (21), то указанные операции не требуются, при этом оценки образуются на основании достаточных статистик.

В зависимости от конкретных задач на функционирование блока d^* можно налагать различные требования. Например, он может сразу же после наблюдения формировать на выходе оценки d^*_1, d^*_2, ..., которые затем отвергаются, если выносится решение d_0. Во многих практических задачах целесообразна работа блока d^* в ключевом режиме, когда до вынесения решения об обнаружении на выходе d^* оценок нет. Но после принятия решения d_1 с выхода блока d^* сразу же поступают оценки d^*_n, d^*_{n+1}, ... При этом, если в блок d^* включить схему памяти, то могут быть использованы и предыдущие оценки d^*_1, ..., d^*_{n-1}.

Не исключен случай, когда в блоке ПУ выносится решение d_1, хотя на самом деле имеет место ситуация $\theta = 0$. В этом случае на выходе блока d^* формируются псевдооценки. Возможна также и обратная ситуация: принимается решение d_0, хотя $\theta = 1$, при этом оценки d^*_1, d^*_2, ... будут отвергнуты как псевдооценки.

4.1.6. Связь отношения правдоподобия с оценками. Как показано в п. 2, существует явная взаимосвязь ОП с апостериорным распределением оцениваемого процесса $\{x_k\}$ (см. (13), (15)). Это наталкивает на мысль, что должна существовать явная связь для ОП и байесовских оценок процесса. Такую зависимость, как мы увидим, можно найти, например, после перехода к достаточным статистикам и конкретизации рекуррентных алгоритмов (см. § 4.3). Однако можно получить также формулу, непосредственно связывающую ОП с байесовскими оценками сигнала, еще до конкретизации задачи. Для этого поступим следующим образом.

Представим условную плотность $\rho[y_{k+1}-S(x_{k+1})]$, входящую в (13), в виде степенного ряда

$$\rho[y_{k+1}-S(x_{k+1})]=\rho(y_{k+1})+\sum_i \frac{(-1)^i}{i!} S^i(x_{k+1}) \frac{\partial^i \rho(y_{k+1})}{\partial y_{k+1}{}^i},\ i=1,2,\ldots \tag{4.1.24}$$

предполагая при этом, что радиус сходимости ряда охватывает область изменения сигнала. Обозначим

$$\widehat{S^i_{k,k+1}}=\iint S^i(x_{k+1})\,\pi(x_{k+1}|x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k\,dx_{k+1}, \tag{4.1.25}$$

$$f_i(y_{k+1})=\frac{(-1)^i}{i!\rho(y_{k+1})}\,\frac{\partial^i \rho(y_{k+1})}{\partial^i y_{k+1}}. \tag{4.1.26}$$

Подставляя (24) в (13) и учитывая (25), (26), получим

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k\left[1+\sum_i \widehat{S^i_{k,k+1}} f_i(y_{k+1})\right]. \tag{4.1.27}$$

Отметим, что оценка (25)

$$\widehat{S^i_{k,k+1}}=\iint S^i(x_{k+1})\,p(x_{k+1},x_k|y_1{}^k,\theta=1)\,dx_k dx_{k+1}=$$
$$=\int S^i(x_{k+1})\,p(x_{k+1}\,|\,y_1{}^k,\theta=1)\,dx_{k+1}$$

есть экстраполяционная (см. гл. 11) оценка i-й степени сигнала $S(x_{k+1})$, оптимальная в смысле минимума среднеквадратической ошибки.

Соотношение (27) устанавливает связь ОП с байесовскими экстраполяционными оценками сигнала в рассматриваемом случае. При этом оно определяет структуру оптимального обнаружителя, являющегося многоканальным, вообще говоря, с бесконечным числом каналов. Основные операции сводятся к формированию оценок $\widehat{S^i_{k,k+1}}$, пропусканию наблюдаемых данных через безынерционные нелинейные преобразователи с характеристиками (26), перемножению результатов с последующим суммированием.

При реализации обнаружителя по указанной схеме необходимо идти, разумеется, на ограничение числа каналов. В общем случае это приведет к некоторой потери оптимальности (соответствующие способы синтеза рассматриваются в гл. 6).

4.1.7. Сигнал — функция многомерного процесса. При выводе алгоритмов п. 2 предполагалось, что параметр сигнала $S(x_i, t_i)$ образует одномерный марковский процесс $\{x_i\}$, $i=1, 2, \ldots$. Однако аналогично проводится вывод и для случая, когда сигнал $S(\mathbf{x}_i, t_i)$ есть функция многомерного (векторного) марковского процесса с дискретным временем $\{\mathbf{x}(t_i)\}$, $i=1, 2, \ldots$. Такой многомерный процесс состоит, например, из m компонент $\{\mathbf{x}(t_i)\}=\{x_1(t_i),\ x_2(t_i),\ \ldots,\ x_m(t_i)\}$, образующих вместе векторный марковский процесс (см. п. 1.2.6). При непрерывном фазовом пространстве этот процесс определяется переходной плотностью $\pi(\mathbf{x}_{i+1}|\mathbf{x}_i)$ и начальным распределением $\pi(\mathbf{x}_1)$.

Нетрудно убедиться, что структура алгоритмов п. 2 в рассматриваемом многомерном случае остается прежней. Изменения в форме записи связаны лишь с заменой x на $\mathbf{x}$.

В ряде задач полезный сигнал является функцией не одного, а нескольких случайных параметров. Именно для такого рода задач и требуется указанное обобщение.

4.1.8. Сигнал — функция сложного марковского процесса. Предположим теперь, что параметр x_i $(i=1, 2, \ldots)$ сигнала $S(x_i, t_i)$ является m-связным марковским процессом (см. п. 1.2.7) с переходной плотностью $\pi(x_{i+1}|x_i, \ldots, x_{i-m+1})$ и начальной плотностью $\pi(x_1, \ldots, x_m)$. Рекуррентные алгоритмы (12), (13) допускают обобщение и на этот случай:

$$w_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) = \frac{\int \rho\,[y_{k+1} - S_k(x_{k+1})]\,\pi(x_{k+1}\,|\,\mathbf{x}_k)\,w_k(\mathbf{x}_k)\,dx_{k-m+1}}{\int\int\ldots \rho\,[y_{k+1} - S(x_{k+1})]\,\pi(x_{k+1}\,|\,\mathbf{x}_k)\,w_k(\mathbf{x}_k)\,dx_{k+1}d\mathbf{x}_k}, \quad k=m, m+1, \ldots;$$

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1})}\int\int\ldots \rho\,[y_{k+1} - S(x_{k+1})]\,\pi(x_{k+1}\,|\,\mathbf{x}_k)\,w_k(\mathbf{x}_k)\,d\mathbf{x}_k\,dx_{k+1}. \quad (4.1.28)$$

Здесь $\mathbf{x}_k = (x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-m+1})$, а АПВ

$$w_k(\mathbf{x}_k) = p(x_k, \ldots, x_{k-m+1}\,|\,y_1^k, \theta=1).$$

Начальные условия для (28) имеют вид:

$$w_m(\mathbf{x}_m) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \rho\,[y_i - S(x_i)]\,\pi(\mathbf{x}_m)}{\int\int\ldots \prod_{i=1}^{m} \rho\,[y_i - S(x_i)]\,\pi(\mathbf{x}_m)\,d\mathbf{x}_m},$$

$$\Lambda_m = \frac{\int\int\ldots \prod_{i=1}^{m} \rho\,[y_i - S(x_i)]\,\pi(\mathbf{x}_m)\,d\mathbf{x}_m}{\prod_{i=1}^{m} \rho(y_i)}.$$

Отметим, что рассматриваемую здесь задачу синтеза можно также решить, непосредственно опираясь на результат предыдущего пункта. Для этого нужно сложный марковский процесс свести к многомерному простому (см. п. 1.2.7) и затем применить алгоритмы п. 7.

4.1.9. Наблюдение векторного процесса. В некоторых задачах наблюдаемые данные представляют собой векторный случайный процесс $\{\mathbf{y}(t_i)\} = \{y_1(t_i), \ldots, y_l(t_i), \ldots, y_m(t_i)\}$, $i=1, 2, \ldots$ При этом возможны две ситуации

$$y_l(t_i) \equiv y_{l_i} = \begin{cases} s_l(x_{li} t_i) + \xi_{li}, & \text{при } \theta = 1, \\ \xi_{li}, & \text{при } \theta = 0, \end{cases}$$

$$l = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь s_l — заданные функции; случайные величины x_{li} образуют многомерный марковский процесс $\{\mathbf{x}(t_i)\} = \{x_1(t_i), \ldots, x_l(t_i), \ldots, x_m(t_i)\}$ $(i=1, 2 \ldots)$ с переходной плотностью $\pi(\mathbf{x}_{i+1}|\mathbf{x}_i)$ и начальным распределением $\pi(\mathbf{x}_1)$. Случайный вектор $\{\xi_1(t_i), \ldots, \xi_m(t_i)\}$ описывается совместной плотностью вероятностей $\rho(\xi_{1i}, \ldots, \xi_{mi})$; при этом предполагается, что по i указанный вектор статистически независим.

Данная постановка задачи отличается от постановки п. 7, где сигнал был скалярной функцией векторного случайного процесса, т. е. являлся скалярным случайным процессом. Здесь же и полезный сигнал, и наблюдаемые данные являются векторными процессами.

Используя метод, аналогичный п. 2, можно показать, что АПВ $w_k(\mathbf{x}_k)=p(x_{1k}, \ldots, x_{mk} \mid \mathbf{y}_1^k, \theta=1)$, $\mathbf{y}_1^k=(y_{11}, \ldots, y_{1k}, y_{21}, \ldots, y_{2k}, \ldots, y_{m1}, \ldots, y_{mk})$

и ОП $\Lambda_n=\dfrac{p(\mathbf{y}_1^n \mid \theta=1)}{p(\mathbf{y}_1^n \mid \theta=0)}$

описываются соотношениями

$$w_k(\mathbf{x}_{k+1})=$$
$$=\frac{\rho[y_{1,k+1}-S_1(x_{1,k+1}), \ldots, y_{m,k+1}-S_m(x_{m,k+1})] \int\ldots\int \pi(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_k)\, w_k(\mathbf{x}_k)}{\int\ldots\int \rho[y_{1,k+1}-S_1(x_{1,k+1}), \ldots, y_{m,k+1}-S_m(x_{m,k+1})]\, \pi(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_k)} \times$$
$$\times \frac{d\mathbf{x}_k}{w_k(\mathbf{x}_k)\, d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1}}, \tag{4.1.29}$$
$$\Lambda_{k+1}=\frac{\Lambda_k}{\rho[y_{1,k+1}, \ldots, y_{m,k+1}]}\int\ldots\int \rho[y_{1,k+1}-S_1(x_{1,k+1}), \ldots, y_{m,k+1}-$$
$$-S_m(x_{m,k+1})]\, \pi(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_k)\, w_k(\mathbf{x}_k)\, d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1}.$$

Полученные рекуррентные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации в одном частном случае переходят в соотношения работы [90]. Это произойдет, когда случайные величины ξ_{li} независимы не только по i, но и по l, величины x_{li} независимы по l, $S_l(x_{li})=x_{li}$ и $l=2$. В данном случае рекуррентное соотношение (29) распадается на два.

4.1.10. Дискретный параметр. В предыдущих задачах параметр x сигнала $S(x, t)$ представлял собой непрерывную случайную величину. Рассмотрим теперь случай, когда параметр x принимает дискретное, причем конечное множество значений. Такого рода постановка представляет определенный практический интерес, поскольку в ряде технических задач используются сигналы с дискретным параметром (см., например, [23]).

Итак, пусть наблюдаемые данные y_i определяются прежним соотношением (1). При этом пусть $x_i \in X$, где пространство X состоит из конечного числа несовместимых состояний $X=(x^1, x^2, \ldots, x^l)$. Случайные величины $\{x_i\}$ $(i=1, 2 \ldots)$ образуют дискретную цепь Маркова (см. п. 1.2.2), задаваемую матрицами переходных вероятностей

$$_i\pi=\|\, _i\pi_{\beta\alpha} \,\|_1^l, \quad i=1, 2, \ldots \tag{4.1.30}$$

и вектором начальных вероятностей $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l)$. Вероятностный смысл элементов матрицы (30) определяется соотношением

$$P\{x_{i+1}=x^\alpha \mid x_i=x^\beta\}= {}_i\pi_{\beta\alpha}.$$

Шум оставим без изменения, т. е. ξ_i по-прежнему будет непрерывной случайной величиной.

В данном случае вместо апостериорной плотности $w_k(x_k)$ нужно ввести в рассмотрение апостериорные вероятности

$$w_k(x^\beta)=P(x_k=x^\beta \mid y_1^k, \theta=1), \quad \beta=1, 2, \ldots, l.$$

Отношение правдоподобия Λ_k имеет прежний смысл.

Поступая аналогично п. 2, получим рекуррентные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации:

$$w_{k+1}(x^{\alpha}) = \frac{\rho\,[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1})] \sum_{\beta=1}^{l} {}_{k}\pi_{\beta\alpha} w_k(x^{\beta})}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \rho\,[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1})]\, {}_{k}\pi_{\beta\alpha} w_k(x_{\beta})}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots l,$$

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1})} \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \rho\,[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1})]_k\, \pi_{\beta\alpha} w_k(x^{\beta}), \quad k = 1, 2 \ldots \tag{4.1.31}$$

Начальные условия определяются соотношениями

$$w_1(x^{\beta}) = \frac{\rho\,[y_1 - S(x^{\beta}, t_1)]\,\pi_{\beta}}{\sum_{\beta=1}^{l} \rho\,[y_1 - S(x^{\beta}, t_1)]\,\pi_{\beta}},$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\rho(y_1)} \sum_{\beta=1}^{l} \rho\,[y_1 - S(x^{\beta}, t)]\,\pi_{\beta}.$$

Аналогия между (12), (13) и (31) очевидна: интегралы заменены суммами, переходные и апостериорные плотности вероятностей — переходными и апостериорными вероятностями.

Отметим, что для многих встречающихся на практике дискретных сигналов (параметров) вполне достаточной математической моделью является однородная цепь Маркова. В таких случаях элементы матрицы ${}_{i}\pi$ (30) не зависят от момента времени t_i (т. е. от индекса i), при этом в алгоритмах (31) индекс k при ${}_{k}\pi_{ij}$ опускается.

4.2. ОБЩИЕ АЛГОРИТМЫ (НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ)

4.2.1. Вводные замечания. Перейдем к случаю, когда наблюдение и марковские процессы, на основе которых строятся модели сигналов, протекают в непрерывном времени. Наблюдаемый процесс (4.1.1) в данном случае примет вид

$$y_t = \theta S(x_t, t) + \xi_t; \ \theta = 0, 1; \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.1}$$

где параметр x_t сигнала $s(x_t, t)$ является марковским процессом с непрерывным временем. Этот параметр, как и в § 4.1, может описываться гауссовским и негауссовским распределением вероятностей, иметь непрерывное и дискретное фазовое пространство.

Что же касается шума ξ_t, то нужно отметить следующее. В § 4.1 он представлял собой процесс с независимыми значениями $\{\xi_i, i=1, 2, \ldots\}$ и определялся плотностями вероятностей $\rho(\xi_i, t_i)$, которые могли быть гауссовскими и негауссовскими. При непрерывном времени случайный процесс с независимыми значениями переходит в обобщенный случайный процесс типа белого шума, который можно рассматривать как производную процесса с независимыми приращениями. Среди процессов такого типа важнейшее место занимает белый гауссовский

шум — производная винеровского процесса. Особая роль белого гауссовского шума объясняется причинами, отмеченными в п. 1.5.2, а также исключительностью винеровского процесса среди процессов с независимыми приращениями. Последнее обусловлено тем, что случайный процесс с независимыми приращениями, имеющий непрерывные с вероятностью 1 траектории, является винеровским. Эти обстоятельства оправдывают отказ от максимальной степени общности — рассмотрения в качестве ξ_t общей модели «белого негауссовского» шума. В дальнейшем под ξ_t понимается белый гауссовский шум со спектральной плотностью N, статистически не зависящий *) от процесса x_t.

4.2.2. Уравнения для отношения правдоподобия. Выведем стохастические уравнения путем предельного перехода [100] в рекуррентном алгоритме (4.1.13).

Белому гауссовскому шуму $\{\xi_t,\ t\geqslant 0\}$ соответствует в дискретном времени гауссовский процесс с независимыми значениями $\{\xi(t_k),\ k=1, 2, \ldots\}$, описываемый плотностью вероятностей

$$\rho(\xi_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N}{\Delta t}}}\exp\left\{-\frac{\Delta t}{2N}\xi^2_k\right\},\quad \Delta t=t_k-t_{k-1}. \tag{4.2.2}$$

Подставим (2) в (4.1.13) и разложим экспоненту в ряд по степеням Δt. Используя затем условие нормировки

$$\int\int\pi(x_{k+1}\,|\,x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1}=1,$$

приведем (4.1.13) к виду

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k+\Lambda_k\int\int\left\{\frac{\Delta t}{2N}\left[2y_{k+1}S(x_{k+1})-S^2(x_{k+1})\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{(\Delta t)^2y^2_{k+1}}{2N^2}S^2(x_{k+1})\right\}\pi(x_{k+1}|x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1}+O\left[(\Delta t)^2\right], \tag{4.2.3}$$

где $O\left[(\Delta t)^2\right]$ — члены порядка малости $(\Delta t)^2$ и выше. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int\int S(x_{k+1})\,\pi(x_{k+1}\,|\,x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1}=\int S(x_{k+1})\,p(x_{k+1}\,|\,y_1^k,\ \theta=1)\,dx_k.$$

В пределе при $\Delta t\to 0$ он переходит в апостериорное математическое ожидание сигнала $S(x_t,\ t)$, параметр которого x_t является марковским диффузионным процессом,

$$\mathrm{M}\left[S(x_t,t)\,|\,y_0^t,\ \theta=1\right]=\int S(x,t)\,w_t(x)\,dx\equiv\widehat{S}_t. \tag{4.2.4}$$

Здесь

$$w_t(x)=p(x_t\,|\,y_0^t,\ \theta=1) \tag{4.2.5}$$

есть АПВ параметра сигнала. Через y_0^t обозначена наблюдаемая на отрезке $[0,\ t]$ реализация процесса $\{y_t\}$.

При переходе в рекуррентном соотношении (3) к пределу при $\Delta t\to 0$ можно получить стохастические дифференциальные уравнения двух видов в зависимости от того, учитывается или отбрасывается член типа $(\Delta t y_{k+1})^2$.

---

*) Более сложный случай, когда имеется зависимость между белым шумом и сигналом, рассматривается в гл. 7.

Если под шумом понимать строго дельта-коррелированный процесс, то указанный член необходимо учитывать, поскольку при $\Delta t \to 0$ он дает вклад $N\Delta t$ в силу свойства (1.4.12) стандартного винеровского процесса. При этом соответствующее стохастическое уравнение будет записано в форме Ито.

В результате из (3) при $\Delta t \to 0$ получаем стохастическое уравнение для функционала отношения правдоподобия (ОП)

$$\Lambda_t = \frac{p(y_0{}^t \mid \theta = 1)}{(y_0{}^t \mid \theta = 0)}$$

В форме Ито

$$d^*\Lambda_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \widehat{S}_t d\overline{y}_t, \tag{4.2.6}$$

где

$$d\overline{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau. \tag{4.2.7}$$

В практических задачах шум является «сглаженным» процессом, не дельта-коррелированным. При этом член $(\Delta t y_{k+1})^2$ имеет порядок малости уже не $O[(\Delta t)]$, $O[(\Delta t)^2]$ и в пределе дает нулевой вклад. Переходя в (3) к пределу, отбрасывая указанный член*), получим стохастическое уравнение для ОП, записанное в симметризованной форме:

$$d\Lambda_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \widehat{S}_t d\overline{y}_t - \frac{1}{2N} \Lambda_t \widehat{S^2_t} dt \tag{4.2.8}$$

или

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \widehat{S}_t y_t - \frac{1}{2N} \Lambda_t \widehat{S^2_t}. \tag{4.2.9}$$

Здесь обозначено

$$\widehat{S_t^2} = \mathrm{M}\,[S^2(x_t, t) \mid y_0{}^t, \theta = 1] = \int S^2(x, t) w_t(x)\, dx. \tag{4.2.10}$$

При симметризованной записи стохастических выражений с ними можно обращаться, используя обычные правила дифференцирования и интегрирования, как если бы процессы $\{x_t\}$ и $\{\xi_t\}$ были гладкими функциями (см. § 1.5). Найдем решения полученных стохастических дифференциальных уравнений. Для этого сделаем замену $z_t = \ln \Lambda_t$. Рассмотрим вначале симметризованное уравнение (9). Учитывая, что дифференцирование в этом случае осуществляется по обычному правилу $\dot{z}_t = \dot{\Lambda}_t / \Lambda_t$, из (9) получаем

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} \widehat{S}_t y_t - \frac{1}{2N} \widehat{S^2_t}. \tag{4.2.11}$$

Используя начальное условие $z_0 = 0$ (так как $\Lambda_0 = 1$, что следует, например из (4.1.12′), находим логарифм отношения правдоподобия (ЛП)

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \widehat{S}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \widehat{S^2}\, dt, \tag{4.2.12}$$

---

*) В гл. 7 будет показано, что этот метод в рассматриваемом случае эквивалентен переходу от уравнения Ито к симметризованному уравнению с помощью формулы связи (1.5.7) стохастических интегралов.

откуда

$$\Lambda_T = \exp\left\{ \frac{1}{N} \int_0^T \widehat{S}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \widehat{S}_t^2 dt \right\}. \qquad (4.2.13)$$

Рассмотрим теперь уравнение (6). В данном случае дифференцирование производится по правилу Ито (1.4.20). Для того, чтобы непосредственно использовать указанное правило в рассматриваемой задаче, нужно стохастический дифференциал (7) выразить через дифференциал стандартного винеровского процесса ω_t, для которого $\mathbf{M}\omega_t=0$, $\mathbf{D}\omega_t=t$. Учитывая (1), (7), а также то, что

$$\xi_t = \sqrt{N}\,\dot{\omega}_t,$$

имеем

$$d\bar{y}_t = \theta S(x_t, t)\,dt + \sqrt{N}\,d\omega_t. \qquad (4.2.14)$$

Подставим это выражение в (6), затем применим к $\ln \Lambda_t$ формулу дифференцирования Ито (1.4.20) и потом вновь воспользуемся (14). В результате получим

$$d^* z_t = \frac{1}{N} \widehat{S}_t d\bar{y}_t - \frac{1}{2N} \widehat{S}_t^2\, dt. \qquad (4.2.15)$$

Таким образом,

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \widehat{S}_t d^* \bar{y}_t - \frac{1}{2N} \int_0^T \widehat{S}_t^2\, dt,$$

или, что то же*),

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \widehat{S}_t y_t d^* t - \frac{1}{2N} \int_0^T \widehat{S}_t^2\, dt. \qquad (4.2.16)$$

При этом ОП

$$\Lambda_T = \exp\left\{ \frac{1}{N} \int_0^T \widehat{S}_t y_t d^* t - \frac{1}{2N} \int_0^T \widehat{S}_t^2\, dt \right\}. \qquad (4.2.17)$$

Формулы (13) и (17) определяют ОП для проблемы (1). Различный вид этих выражений является следствием использования различных форм записи стохастических интегралов.

Полученные алгоритмы дают ОП в виде функционального преобразования наблюдаемого процесса и байесовских среднеквадратических оценок (4), (10). Как будет видно из дальнейшего (при рассмотрении квазиоптимальных методов), основные операции при обработке наблюдаемого процесса y_t в ряде случаев сводятся к моделированию первого члена в алгоритмах (12), (16). Эти операции состоят в умножении y_t на оценку $\hat{S}_t$ полезного сигнала и последующем интегрировании. Таким образом, основной элемент обнаружителя представляет собой коррелятор наблюдаемых данных и оценки сигнала. Поэтому полученные здесь алгоритмы называем алгоритмами оценочно-корреляционного типа.

---

*) Здесь принято условное обозначение для стохастического дифференциала Ито $d^*\bar{y}_t = y_t d^* t$, которое будет использоваться и в дальнейшем.

В частном случае, когда сигнал является детерминированным $S(x_t, t)=S(t)$, оценка равна самому сигналу:

$$\widehat{S}_t = S(t). \qquad (4.2.18)$$

Заметим, что в этом вырожденном случае стохастические интегралы Ито и симметризованный совпадают, что следует непосредственно из формулы связи (1.5.7). Поэтому в данном случае должны совпадать полученные здесь симметризованный алгоритм и алгоритм в форме Ито. Действительно, для детерминированного сигнала

$$\widehat{S}_t^2 = \widehat{S_t^2} = S_t^2 .$$

При этом алгоритмы (12) и (16) приобретают одинаковый вид

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T S_t y_t dt - \frac{1}{2N}\int_0^T S_t^2 dt. \qquad (4.2.19)$$

Формула (19) определяет ЛП в задаче обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого шума. Эта формула хорошо известна. Она дает структуру оптимального приемника, который может быть смоделирован в виде коррелятора или согласованного линейного фильтра. Импульсная характеристика согласованного фильтра (т. е. его отклик на сигнал в виде дельта-функции), формирующего интеграл $\int_0^T S(t)\,y(t)\,dt$, равна

$$h(t) = S(T-t). \qquad (4.2.20)$$

Итак, корреляционная обработка является частным случаем оценочно-корреляционных алгоритмов.

Простой вид (19) оптимального алгоритма есть следствие простой модели сигнала — детерминированной. Если сигнал не является детерминированным, то соотношение (18) не имеет места, при этом необходимо отыскать оценку $\widehat{S}_t$ (4) сигнала $S(x_t, t)$. Для этого потребуется АПВ (5), к выводу соответствующих уравнений мы и переходим.

4.2.3. Уравнения нелинейной фильтрации. Выведем уравнения для АПВ (5) аналогично предыдущему, т. е. методом предельного перехода*) к непрерывному времени в соответствующем рекуррентном алгоритме.

Подставляя (2) в (4.1.12) и поступая затем так же, как и при получении (3), найдем:

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\left\{1 + \frac{\Delta t}{N}\left[y_{k+1}S(x_{k+1}) - \frac{1}{2}S^2(x_{k+1})\right] + \frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{2N^2}S^2(x_{k+1})\right\}\int \pi(x_{k+1}|x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k}{1 + \frac{\Delta t}{N}\left[y_{k+1}\widehat{S}_{k,k+1} - \frac{1}{2}\widehat{S^2_{k,k+1}}\right] + \frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{2N^2}\widehat{S^2_{k,k+1}}} + O[(\Delta t)^2],$$

*) Излагаемый здесь метод является упрощенным, однако он достаточно нагляден и поэтому его целесообразно использовать при первоначальном изучении предмета. Далее (гл. 7) результаты данного пункта будут выведены из общих уравнений без обращения к дискретному времени.

где

$$\widehat{S}_{k,k+1}=\iint S(x_{k+1})\,\pi(x_{k+1}\mid x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1}=\mathrm{M}\,[S(x_{k+1})\mid y_1^k,\ \theta=1],$$

$$\widehat{S^2}_{k,k+1}=\mathrm{M}\,[S^2(x_{k+1})\mid y_1^k,\ \theta=1].$$

Далее, используя разложение

$$\frac{1}{1+\Delta t}=1-\Delta t+(\Delta t)^2-\ldots,$$

получим

$$w_{k+1}(x_{k+1})=\int \pi(x_{k+1}\mid x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k+$$
$$+\mathscr{L}(w_k)\int \pi(x_{k+1}\mid x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k+O\,[(\Delta t)^2], \qquad (4.2.21)$$

где

$$\mathscr{L}(w_k)=\frac{\Delta t}{N}\,y_{k+1}\,[S(x_{k+1})-\widehat{S}_{k,k+1}]-\frac{\Delta t}{2N}\,[S^2(x_{k+1})-\widehat{S^2}_{k,k+1}]+$$
$$+\frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{N^2}\left[\frac{1}{2}S^2(x_{k+1})-\frac{1}{2}\widehat{S^2}_{k,k+1}-S(x_{k+1})\,\widehat{S}_{k,k+1}+\widehat{S}^2_{k,k+1}\right]. \qquad (4.2.22)$$

Нетрудно видеть, что если исключить $\mathscr{L}(w_k)\int \pi w_k dx_k$ из (21), то (21) перейдет в уравнение Колмогорова — Чепмена, которое в пределе при $\Delta t\to 0$ даст соотношение, определяющее эволюцию априорной плотности вероятностей процесса x_t, т. е. уравнение Фоккера — Планка (см. (1.2.32)) с оператором

$$L_{pr}=-\frac{\partial}{\partial x}\,a(x,t)+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,b(x,t). \qquad (4.2.23)$$

Оставив $\mathscr{L}(w_k)\int \pi w_k dx_k$ в (21), в пределе получим уравнение для АПВ (5), которое можно записать в виде

$$\dot{w}_t(x)=L_{pr}w_t(x)+\mathscr{L}(w_t)\,w_t(x), \quad t\geqslant 0. \qquad (4.2.24)$$

Оператор $\mathscr{L}(w_t)$ определяется в результате предельного перехода в (22). Заменив $(\Delta t y_{k+1})^2$ при $\Delta t\to 0$ на $N\Delta t$ (см. предыдущий пункт), получим $\mathscr{L}(w_t)$ в форме Ито:

$$\mathscr{L}(w_t)=\frac{1}{N}\,[S(x,t)-\widehat{S}_t]\,[y_t-\widehat{S}_t], \qquad (4.2.25)$$

где $\widehat{S}_t=\widehat{S}_t(w_t)$ определяется соотношением (4).

Отбросив в (22) члены, содержащие $(\Delta t y_{k+1})^2$, найдем симметризованное выражение

$$\mathscr{L}(w_t)=\frac{1}{N}\,y_t\,[S(x,t)-\widehat{S}_t]-\frac{1}{2N}\,[S^2(x,t)-\widehat{S^2_t}], \qquad (4.2.26)$$

где $\widehat{S^2_t}$ определяется формулой (10).

Итак, получено стохастическое уравнение (24), описывающее эволюцию во времени АПВ $\omega_t(x)$ диффузионного параметра x_t сигнала $S(x_t,t)$, наблюдаемого на фоне белого шума. Оно является уравнением в форме Ито, если $\mathscr{L}(w_t)$ берется из (25), и симметризованным, если используется (26). Оператор L_{pr} для обоих случаев определяется формулой (23). Начальное условие для (24) задается априорной плотностью $w_0(x)$ случайной величины x_0.

Уравнение (24) является нелинейным интегро-дифференциальным с частными производными. Определяя АПВ $w_t(x)$, оно тем самым позволяет находить оптимальные (линейные и нелинейные) оценки сигнала $S(x_t, t)$ и его параметра и интерпретируется как уравнение оптимальной нелинейной фильтрации. Впервые подобное уравнение получено Стратоновичем [116, 118].

4.2.4. Уравнения совместного обнаружения и фильтрации. Многомерное обобщение. Уравнения (24) вместе с соответствующими уравнениями для ОП (или АП), полученными в п. 4.2.2, составляют основу для решения задач совместного обнаружения и фильтрации сигналов, протекающих в непрерывном времени. Уравнения совместного обнаружения и фильтрации в форме Ито определяются соотношениями (15), (24), (25), а в симметризованной форме — (11), (24), (26). Их применение в рамках оптимальной системы совместного обнаружения и фильтрации сигналов на фоне шума аналогично случаю дискретного времени (см. п. 4.1.5).

В уравнения для ЛП и АПВ входит, в частности, БСО $\widehat{S}_t$ сигнала $S(x_t, t)$. Необходимо отметить, что эта оценка в симметризованных уравнениях, вообще говоря, отличается от аналогичной оценки в уравнениях Ито, поскольку АПВ $w_t(x)$, используемая при вычислении БСО согласно (4), определяется из разных уравнений.

Симметризованные уравнения совместного обнаружения и фильтрации (11), (23), (24), (26) можно записать также в следующем компактном виде [108]:

$$\dot{w}_t(x) = [L - \overline{L}(w_t)]\, w_t(x), \tag{4.2.27}$$

$$\dot{z}_t = \overline{L}(w_t), \tag{4.2.28}$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} a(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, t) + \frac{1}{N} S(x, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(x, t)\right], \tag{4.2.29}$$

$$\overline{L}(w_t) = \int L w_t(x)\, dx = \frac{1}{N}\int S(x, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(x, t)\right] w_t(x)\, dx. \tag{4.2.30}$$

Уравнения совместного обнаружения и фильтрации допускают прямое обобщение (для обеих форм записи) на случай, когда полезный сигнал $S(x_t, t)$ является скалярной функцией многомерного марковского процесса $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \ldots, x_{mt})$, определяемого коэффициентами переноса $a_i(\mathbf{x}, t)$ и диффузии $b_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $i, j = 1, \ldots, m$. При этом в уравнениях x заменяется на $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и изменяется согласно (1.2.53) априорный оператор (23). Так симметризованные уравнения (27), (28), (30) сохраняют прежний вид (с заменой x на $\mathbf{x}$), где

$$L = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{N} S(\mathbf{x}, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(\mathbf{x}, t)\right]. \tag{4.2.31}$$

Моделирование уравнений совместного обнаружения и фильтрации (27)—(30) представляет собой сложную техническую задачу. Однако эта задача в дальнейшем будет существенно упрощена благодаря переходу к уравнениям для достаточных статистик (§ 4.3), а также применению приближенных методов (см. гл. 6).

4.2.5. Наблюдение векторного процесса. Рассмотрим теперь случай, когда наблюдается векторный случайный процесс $\{\mathbf{y}_t\}$, компоненты которого определяются соотношением

$$y_{it}=\theta S_i(x_{it},t)+\xi_{it};$$
$$\theta=0,1;\quad 0\leqslant t\leqslant T;\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Параметры сигнала S_i образуют многомерный марковский диффузионный процесс $\{\mathbf{x}_t\}=\{x_{1t},\ldots,x_{mt}\}$ с коэффициентами (1.2.54). Будем считать, что компоненты $\{\xi_{1t},\ldots,\xi_{mt}\}$ являются не зависящими от $\mathbf{x}_t$, дельта-коррелированными гауссовскими случайными функциями, для которых

$$M\xi_{it}=0,\quad M\xi_{it}\xi_{j,\,t+\tau}=N_{ij}\delta(\tau),\quad i,j=1,\ldots,m.$$

Предположим, что матрица $\|N_{ij}\|$ имеет обратную

$$\|C_{ij}\|=\|N_{ij}\|^{-1}.$$

Обобщая предыдущие результаты, получим уравнения для АПВ

$$w_t(\mathbf{x})=p(x_{1t},\ldots,x_{mt}|y_{10}{}^t,\ldots,y_{m0}{}^t,\theta=1)$$

и для ЛП

$$z_t=\ln\frac{p(y_{10}{}^t,\ldots,y_{m0}{}^t\mid\theta=1)}{p(y_{10}{}^t,\ldots,y_{m0}{}^t\mid\theta=0)}.$$

Операторный вид этих уравнений в симметризованной форме совпадает с (27), (28), а L и $\overline{L}(\omega_t)$ равны:

$$L=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(\mathbf{x},t)+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}b_{ij}(\mathbf{x},t)+$$
$$+\sum_{i,\,j=1}^{m}C_{ij}S_i(x_i,t)\left[y_j-\frac{1}{2}S_j(x_j,t)\right],$$
$$\overline{L}=\sum_{i,\,j=1}^{m}C_{ij}\int S_i(x_i,t)\left[y_j-\frac{1}{2}S_j(x_j,t)\right]w_t(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.\qquad(4.2.32)$$

Соотношения (29), (30) являются частным случаем (32) (при $m=1$).

4.2.6. Дискретный параметр. В ряде практических задач сигналы (и их параметры) протекают в непрерывном времени, а возможные значения параметров принадлежат некоторому дискретному пространству состояний. Такого рода задачи возникают, например, при дискретной передаче непрерывных сообщений, при использовании фазоманипулированных сигналов и т. д. В этих случаях математической моделью параметра сигнала может служить марковский процесс с непрерывным временем и дискретным фазовым пространством (см. п. 1.2.4).

Итак, пусть наблюдаемые данные y_t определяются соотношением (7), где параметр x_t представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний $(x^1,x^2,\ldots,x^l)$.

Марковский процесс $\{x_t\}$ задается вектором начальных вероятностей и переходными вероятностями $\pi_{\beta\alpha}(\tau,t)=P(x_t=x^\alpha\mid x_\tau=x^\beta)$; последние можно представить в виде (1.2.22).

В данном случае уравнения совместного обнаружения и фильтрации описывают эволюцию апостериорных вероятностей

$$w_t(x^\alpha) = P\{x_t = x^\alpha \mid y_0{}^t,\ \theta = 1\}, \quad \alpha = 1, \ldots, l$$

и ЛП z_t, имеющего прежний смысл. Обращаясь к выводу уравнений совместного обнаружния и фильтрации, нетрудно усмотреть, что дискретность фазового пространства процесса x_t не влияет на общий вид уравнений, полученных в п. 2 и 3. Изменения связаны лишь с конкретизацией согласно (1.2.26) априорного оператора L_{p2}, входящего в (24), (29), и с заменой интегралов при записи апостериорных математических ожиданий (4), (10) соответствующими суммами.

С учетом сказанного симметризованные уравнения (27)—(30) в рассматриваемом случае принимают вид:

$$\dot{w}_t(x^\alpha) = -q_\alpha(t)\, w_t(x^\alpha) +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq\alpha}}^{l} q_{\gamma\alpha}(t)\, w_t(x^\gamma) + \frac{1}{N} S(x^\alpha, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(x^\alpha, t)\right] w_t(x^\alpha) -$$

$$- \frac{1}{N} w_t(x^\alpha) \sum_{\gamma=1}^{l} S(x^\gamma, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(x^\gamma, t)\right] w_t(x^\gamma), \quad \alpha = 1, \ldots, l, \qquad (4.2.33)$$

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} \sum_{\gamma=1}^{l} S(x^\gamma, t)\left[y_t - \frac{1}{2} S(x^\gamma, t)\right] w_t(x^\gamma). \qquad (4.2.34)$$

Подобным же образом конкретизируются и уравнения совместного обнаружения и фильтрации в форме Ито (15), (24), (25).

4.3. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ АЛГОРИТМОВ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ СИНТЕЗА

В настоящем параграфе излагаются способы конкретизации полученных выше общих алгоритмов. Синтезируются оптимальные системы совместного обнаружения и фильтрации для ряда прикладных задач. Рассматриваются гауссовские и негауссовские сигналы; шум во всех случаях гауссовский.

4.3.1. Марковский гауссовский сигнал (дискретное время). Вначале остановимся на случае, когда полезный сигнал представляет собой марковский гауссовский процесс. Обладая свойствами как марковских, так и гауссовских процессов, такой процесс является весьма гибкой математической моделью. При этом он играет важную роль при описании реальных сигналов и шумов. Марковский гауссовский процесс служит также основой для построения ряда более сложных моделей. Поэтому мы и уделяем ему особое внимание.

Итак, пусть в наблюдаемых данных (4.1.1) содержится (быть может) полезный сигнал

$$S(x_i, t_i) = x_i, \qquad (4.3.1)$$

где $\{x_i\}$ является марковским гауссовским процессом с дискретным временем, для которого переходная и начальная плотности вероятностей равны:

$$\pi(x_{k+1}, \Delta t \mid x_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp\left\{-\frac{(x_{k+1}-x_k R)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}, \quad (4,3.2)$$

$$R = \exp\{-\gamma\,|\Delta t|\}, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad (4.3.3)$$

$$\pi(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Здесь σ^2 — локальная дисперсия; R — коэффициент корреляции; γ^{-1} — время корреляции сигнала. Предполагается также, что шум гауссовский:

$$\rho(\xi_k) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\xi_k^2}{2\sigma_0^2}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (4.3.4)$$

Поскольку сигнал и шум являются гауссовскими и аддитивными, то АПВ $w_k(x_k)$ будет также гауссовской, причем ее можно представить в виде

$$w_k(x_k) = \sqrt{\frac{h_k}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} h_k (x_k - m_k)^2\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (4.3.5)$$

Апостериорное среднее m_k и апостериорная дисперсия $1/h_k$ полностью определяет плотность $w_k(x_k)$.

Подставим (1), (2), (4) и $w_{k+1}(x_{k+1})$, $w_k(x_k)$ в форме (5) в рекуррентное соотношение (4.1.12) и проинтегрируем по x_k. Затем, приравняв соответствующие члены, стоящие в разных частях полученного равенства, найдем рекуррентные алгоритмы для параметров АПВ:

$$m_{k+1} = y_{k+1} \frac{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2}{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2+h_k\sigma_0^2} + m_k \frac{h_k\sigma_0^2 R}{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2+h_k\sigma_0^2}, \quad (4.3.6)$$

$$h_{k+1} = \frac{h_k}{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (4.3.7)$$

Подставляя (1), (2), (4), (5) в (4.1.13) и интегрируя, получим рекуррентный алгоритм для ОП

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2 h_k}[h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2]+1}} \times \exp\left\{-\frac{m_k^2 h_k R^2}{2[h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2]}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\left[y_{k+1} + \frac{m_k\sigma_0^2 h_k R}{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2}\right]^2 \frac{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2}{h_k\sigma^2(1-R^2)+R^2+h_k\sigma_0^2}\right\},$$

$$k = 1, 2, \ldots \quad (4.3.8)$$

Используя (4.1.14), (4.1.14′), (3) и (4), получим начальные условия

$$m_1 = y_1 \Big/ \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} + 1\right), \quad h_1 = 1/\sigma^2 + 1/\sigma_0^2; \quad (4.3.9)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2/\sigma_0^2}} \exp\left\{\frac{y_1^2}{2\sigma_0^2(\sigma_0^2/\sigma^2+1)}\right\}.$$

При помощи соотношений (6)—(9) можно последовательным образом найти параметры апостериорного распределения и ОП для любого момента времени t_k. Достаточными статистиками (см. п. 4.1.4) в рассматриваемой задаче являются m_k, Λ_k. Рекуррентные алгоритмы (6)—(8) определяют оптимальную систему совместного обнаружения и фильтрации марковского гауссовского сигнала в гауссовском шуме.

Для упрощения приемника целесообразно перейти к $z_k = \ln \Lambda_k$. Введем также обозначения

$$C_{1k} = \frac{h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2}{h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2 + h_k \sigma^2_0}, \quad C_{2k} = \frac{h_k \sigma_0^2 R}{h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2 + h_k \sigma_0^2},$$

$$C_{3k} = \frac{h_k \sigma_0^2 R}{[h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2]}, \quad C_{4k} = \frac{h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2}{2 [h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2 + h_k \sigma_0^2] \sigma_0^2}, \quad (4.3.10)$$

$$C_{5k} = \frac{h_k R^2}{2 [h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2]}, \quad C_{6k} = \ln \sqrt{\frac{1}{h_k \sigma_0^2} [h_k \sigma^2 (1 - R^2) + R^2] + 1},$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда алгоритмы (6)—(8) можно записать в виде

$$m_{k+1} = y_{k+1} C_{1k} + m_k C_{2k}, \quad (4.3.11)$$

$$z_{k+1} = z_k + (y_{k+1} + m_k C_{3k})^2 C_{4k} - m_k^2 C_{5k} - C_{6k}.$$

Структурная схема оптимальной системы совместного обнаружения и фильтрации, описываемая соотношениями (11), представлена на

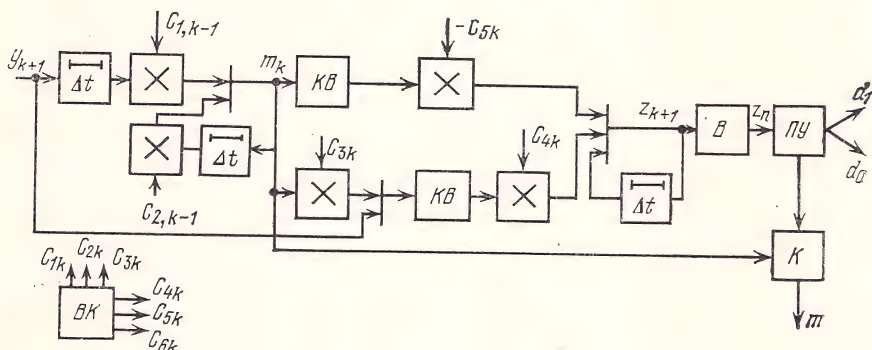


Рис. 4.2

рис. 4.2. Система выполняется в виде комбинации устройств, осуществляющих суммирование, умножение, возведение в квадрат (КВ), а также задержку сигналов. Величины C_{1k}—C_{6k} от наблюдаемых данных не зависят, они играют роль весовых коэффициентов. Эти коэффициенты вычисляются по формулам (7), (10) в специальном блоке (ВК) и подаются последовательно на умножители.

На выходе блока фильтрации (его структура определяется первым из соотношений (11)) образуется сигнал m_k. При $\theta = 1$ он представляет собой оптимальную оценку полезного сигнала $x_k m_k = \hat{x}_k$, критерий оптимальности — минимум среднеквадратической ошибки (в данном примере он совпадает с критерием максимума АПВ). Если же $\theta = 0$, то m_k является псевдооценкой. После превышения порога в ПУ (решение d_1) с выхода ключевого блока (К) поступают оценки (если d_1 верно) или псевдооценки (если d_1 ложно).

4.3.2. Марковский гауссовский сигнал (непрерывное время, одномерный случай). Рассмотрим теперь случай, когда полезный сигнал $S(x_t, t) = x_t$ является непрерывным марковским гауссовским процессом, шум и само наблюдение также протекают в непрерывном времени. Один из методов получения алгоритмов совместного обнаружения и

фильтрации состоит в переходе к непрерывному времени в алгоритмах предыдущего пункта. Для этого, учитывая допредельное выражение плотности шума (4.2.2), нужно в предыдущих соотношениях заменить σ_0^2 на $N/\Delta t$ и затем устремить $\Delta t \to 0$. Принимая во внимание, что $R = 1 - \gamma|\Delta t| + \ldots$ (2), из рекуррентного соотношения (7) в результате предельного перехода получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{h}_t = -2\gamma\sigma^2 h_t^2 + 2\gamma h_t + 1/N. \tag{4.3.12}$$

Переходя к пределу в (6), получаем стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{m}_t = -(\gamma + 1/Nh_t)\, m_t + y_t/Nh_t. \tag{4.3.13}$$

В этом случае различные формы записи стохастического уравнения (см. п. 1.5.3) совпадают.

Уравнения для ОП находят [126] путем предельного перехода в (8). Можно их получить и по-другому, используя общие алгоритмы п. 4.2.2 В последнем случае необходимо определить БСО $\widehat{x_t}$ и $\widehat{x_t^2}$. Учитывая, что АПВ в рассматриваемом примере имеет вид (ср. с (5))

$$w_t(x) = \sqrt{\frac{h_t}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} h_t (x - m_t)^2\right\}, \tag{4.3.14}$$

из (4.2.4), (4.2.10) получаем

$$\widehat{x}_t = m_t, \quad \widehat{x_t^2} = m_t^2 + 1/h_t.$$

Подставляя эти соотношения в (4.2.11), (4.2.15), находим симметризованное

$$\dot{z} = \frac{1}{N} m_t y_t - \frac{1}{2N} m_t^2 - \frac{1}{2Nh_t}, \tag{4.3.15}$$

и в форме Ито

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} m_t y_t - \frac{1}{2N} m_t^2 \tag{4.3.16}$$

стохастические уравнения для ЛП.

Уравнения (12), (13) можно вывести также другим методом [108] без обращения к рекуррентным алгоритмам. Непрерывный марковский гауссовский процесс $\{x_t\}$ в рассматриваемом случае определяется стохастическим уравнением

$$\dot{x}_t = -\gamma x_t + \zeta_t, \tag{4.3.17}$$

где ζ_t — гауссовский дельта-коррелированный процесс $M\zeta_t = 0$. $M\zeta_t\zeta_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau)$. Начальное условие для (17) задается гауссовской случайной величиной x_0.

Коэффициенты переноса и диффузии согласно (1.2.28) в этом примере равны

$$a(x) = -\gamma x, \quad b = \varkappa. \tag{4.3.18}$$

Подставляя их в (4.2.29), находим апостериорный оператор

$$L = \gamma \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{N} x\left(y_t - \frac{1}{2} x\right). \tag{4.3.19}$$

Теперь подставим (14) и (19) в уравнение оптимальной фильтрации (4.2.27). Приравнивая члены при одинаковых степенях x и обозначив локальную дисперсию

$$\varkappa/2\gamma = \sigma^2, \tag{4.3.20}$$

получим прежние уравнения (12), (13). Если $\mathbf{M}x_0=0$, а $\mathbf{D}(x_0)=\sigma^2$, то начальные условия равны

$$h_0=1/\sigma^2, \quad m_0=0.$$

Эти же начальные условия получаются и из (9) (при $1/\sigma_0^2=\Delta t/N$ и $\Delta t\longrightarrow 0$).

Затетим, что для нахождения уравнений фильтрации (12), (13) не требуется вычислять нормировочный функционал $\bar{L}$. Но для определения ЛП он необходим. Подставляя (14) в (4.2.30), (4.2.28), получаем уравнение для z_t (15).

Рис. 4.3

Изложенный способ нахождения уравнений совместного обнаружения и фильтрации не требует обращения к дискретному времени и в вычислительном отношении он проще, чем способ, связанный с предельным переходом.

На рис. 4.3 показана структурная схема оптимальной системы совместного обнаружения и фильтрации, составленная по уравнениям (13), (15). Один из усилителей блока фильтрации имеет, вообще говоря, переменный коэффициент усиления $\tilde{C}(t)=1/Nh(t)$, где $h(t)$ определяется уравнением (12). Задавшись начальным условием $h(0)=h_0$, найдем решение этого уравнения

$$h_t=\frac{C_1}{2\gamma\sigma^2}\,\frac{[1-C_0\exp(-2C_1t)]}{[1+C_0\exp(-2C_1t)]}+\frac{1}{2\sigma^2}, \tag{4.3.21}$$

$$C_1=\sqrt{\gamma^2+2\gamma\sigma^2/N}, \quad C_0=(C_1+\gamma-2\gamma\sigma^2h_0)/(C_1-\gamma+2\gamma\sigma^2h_0).$$

В стационарном случае ($t\longrightarrow\infty$) функция h_t обращается в константу

$$h=\frac{1}{2\sigma^2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\sigma^2}{N\gamma}}\right], \tag{4.3.22}$$

при этом коэффициент усиления $\tilde{C}(t)$ также становится постоянным $\tilde{C}(t)\longrightarrow\tilde{C}=1/Nh$.

Заметим, что блок фильтрации, определяемый уравнением (13), может быть смоделирован с использованием, например, цепочки RC, которая, как известно, описывается уравнением

$$\dot{m}_t=-\alpha m_t+\alpha y_t, \quad \alpha=1/RC, \tag{4.3.23}$$

(y_t — входное воздействие). В нестационарном случае параметр α цепочки RC зависит от времени и в нашем примере равен $[\gamma+1/Nh(t)]$,

а в стационарном режиме $\alpha=(\gamma+\tilde{C})$ — константа. Согласно (13), (23) в блоке фильтрации должен быть использован также нормирующий усилитель.

Система, изображенная на рис. 4.3, является непрерывным аналогом системы для случая дискретного времени (рис. 4.2). Функция m_t, вырабатываемая блоком фильтрации, представляет собой либо оптимальную оценку (при $\theta=1$) сигнала ($m_t=\hat{x}_t$), либо псевдооценку (при $\theta=0$). Отметим, что в рассматриваемом примере (как при дискретном, так и при непрерывном времени) блок оптимальной фильтрации оказался линейным. Это явилось следствием того, что сигнал и шум были гауссовскими и аддитивными. Что же касается блока формирования ЛП, структура которого определяется уравнением (15), то он и в данном примере представляет собой нелинейное устройство.

Полученные уравнения непосредственно обобщаются на случай, когда полезный сигнал

$$S(x_t,\ t)=x_tC_1(t)+C_2(t), \tag{4.3.24}$$

где x_t определяется уравнением (17), а $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — детерминированные функции времени. В этом случае АПВ $w_t(x)$ будет по-прежнему гауссовской. Подставляя (14), (18), (20), (24) в (4.2.27)—(4.2.30), получим уравнения оптимального совместного обнаружения и фильтрации:

$$\dot{h}_t=-2\gamma\sigma^2h_t^2+2\gamma h_t+C_{1t}^2/N,$$

$$\dot{m}_t=-\left(\gamma+\frac{C_{1t}^2}{Nh_t}\right)m_t+\frac{C_{1t}}{Nh_t}(y_t-C_{2t}), \tag{4.3.25}$$

$$\dot{z}_t=\frac{y_t}{N}(m_tC_{1t}+C_{2t})-\frac{1}{2N}m_t^2C_{1t}^2-\frac{1}{N}m_tC_{1t}C_{2t}-\frac{1}{2N}\left(\frac{C_{1t}^2}{h_t}+C_{2t}^2\right).$$

Уравнения (12), (13), (15) являются частным случаем (25) (при $C_{1t}=1$, $C_{2t}=0$).

Иногда в радиотехнических задачах рассматривается амплитудно-модулированный сигнал типа

$$S(x_t,\ t)=(A_0+x_t)\cos(\omega_0t+\varphi_0),$$

где x_t определяется согласно (17), а A_0, ω_0, φ_0 — известные константы. В данном случае

$$C_{1t}=\cos(\omega_0t+\varphi_0),\quad C_{2t}=A_0\cos(\omega_0t+\varphi_0).$$

Подставляя эти выражения в (25), получим уравнения, которые дадут структурную схему оптимальной системы, осуществляющей совместное обнаружение и фильтрацию амплитудно-модулированного радиосигнала в белом шуме.

Перейдем к другому примеру, когда не только амплитуда, но и фаза радиосигнала является случайным процессом.

4.3.3. Флюктуирующий радиосигнал. В ряде задач радиосигнал флюктуирует (модулирован) по амплитуде и фазе:

$$S(A_t,\ \varphi_t,\ t)=A_t\cos(\omega_0t-\varphi_t). \tag{4.3.26}$$

Запишем (26) в виде

$$S(x_{1t},\ x_{2t},\ t) = x_{1t}\cos\omega_0 t + x_{2t}\sin\omega_0 t, \tag{4.3.27}$$

$$x_{1t} = A_t\cos\varphi_t, \qquad x_2 = A_t\sin\varphi_t.$$

Будем считать, что случайные процессы $\{x_{1t}\}$ и $\{x_{2t}\}$ статистически независимы между собой, причем каждый из них описывается уравнением типа (17), параметры γ и $\varkappa$ для обоих процессов выбираются одинаковыми. Такие предположения о компонентах $\{x_{1t}\}$ и $\{x_{2t}\}$ соответствуют практически важному случаю, при котором процессс A_t является релеевским, а одномерный закон распределения фазы — равномерный [119, 131].

Конкретизируем оператор L (4.2.31) с учетом (18) и (27):

$$L = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right) + \frac{\varkappa}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{N}(x_1\cos\omega_0 t + x_2\sin\omega_0 t)\left[y_t - \frac{1}{2}(x_1\cos\omega_0 t + x_2\sin\omega_0 t)\right].$$

В рассматриваемом двумерном случае АПВ $w_t(x_1,\ x_2)$ по-прежнему является гауссовской, и ее можно записать в виде

$$w_t(x_1,\ x_2) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{h_{11t}h_{22t} - h_{12t}^2}\exp\left\{-\frac{h_{11t}}{2}(x_1 - m_{1t})^2 -\right.$$

$$\left. - h_{12t}(x_1 - m_{1t})(x_2 - m_{2t}) - \frac{h_{22t}}{2}(x_2 - m_{2t})^2\right\}. \tag{4.3.28}$$

Подставляя выражение для L и (28) в (4.2.27), (4.2.28), получим уравнения для параметров апостериорного распределения и для ЛП:

$$\begin{aligned}
\dot h_{11t} &= 2\gamma h_{11t} - \varkappa h_{11t}^2 - \varkappa h_{12t}^2 + \frac{1}{2N},\\
\dot h_{12t} &= 2\gamma h_{12t} - \varkappa h_{12t}h_{11t} - \varkappa h_{12t}h_{22t},\\
\dot h_{22t} &= 2\gamma h_{22t} - \varkappa h_{12t}^2 - \varkappa h_{22t}^2 + \frac{1}{2N},
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

$$\begin{aligned}
h_{11t}\dot m_{1t} + h_{12t}\dot m_{2t} &= -\left(\frac{1}{2N} + \gamma h_{11t}\right)m_{1t} - \gamma h_{12t}m_{2t} + \frac{1}{N}y_t\cos\omega_0 t;\\
h_{12t}\dot m_{1t} + h_{22t}\dot m_{2t} &= -\left(\frac{1}{2N} + \gamma h_{22t}\right)m_{2t} - \gamma h_{12t}m_{1t} + \frac{1}{N}y_t\sin\omega_0 t,
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

$$\dot z_t = \frac{y_t}{N}(m_{1t}\cos\omega_0 t + m_{2t}\sin\omega_0 t) - \frac{1}{4N}(m_{1t}^2 + m_{2t}^2) -$$

$$- \frac{1}{4N}\left(\frac{h_{11t} + h_{22t}}{h_{11t}h_{22t} - h_{12t}^2}\right). \tag{4.3.31}$$

Заметим, что в этих уравнениях отброшены вибрационные члены с двойной частотой ($2\omega_0$), которые дают малый вклад и легко отфильтровываются.

Согласно (30), блок фильтрации состоит из двух квадратурных каналов, связанных между собой через параметр h_{12t}. Однако в стационарном режиме ($\dot h_{11t} = \dot h_{12t} = \dot h_{22t} = 0$) эта связь исчезает, поскольку в данном случае $h_{12t} = 0$, что следует из (29). В результате в стационар-

ном случае уравнения совместного обнаружения и фильтрации (30), (31) принимают вид

$$\dot{m}_{1t} = -\left(\gamma + \frac{1}{2Nh}\right) m_{1t} + \frac{1}{Nh} y_t \cos \omega_0 t,$$

$$\dot{m}_{2t} = -\left(\gamma + \frac{1}{2Nh}\right) m_{2t} + \frac{1}{Nh} y_t \sin \omega_0 t, \tag{4.3.32}$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N} (m_{1t} \cos \omega_0 t + m_{2t} \sin \omega_0 t) - \frac{1}{4N} (m_{1t}^2 + m_{2t}^2) - \frac{1}{2Nh}, \tag{4.3.33}$$

где $h = h_{11} = h_{22} = \frac{\gamma}{\varkappa}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varkappa}{2N\gamma^2}}\right)$.

Структурная схема, составленная по уравнениям (32), (33), приведена на рис. 4.4. Генератор опорных напряжений Г формирует квад-

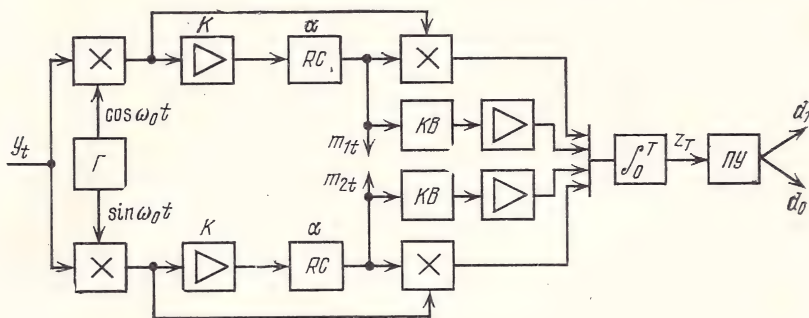


Рис. 4.4

ратурные колебания и подает их на умножители, куда поступают также наблюдаемые данные. Согласно (23) и (32) постоянные времени цепочек RC одинаковы и равны $\alpha = (\gamma + 1/2Nh)$, а коэффициент усиления усилителей

$$K = \frac{1}{Nh(\gamma + 1/2Nh)}.$$

Входящие в (33) константы при моделировании опущены (при необходимости они всегда могут быть учтены соответствующей установкой порога обнаружения в ПУ). Рассматриваемая система осуществляет обнаружение флюктуирующего радиосигнала, а также фильтрацию его компонент. Формируемые на выходе RC цепочек БСО

$$m_{1t} = \hat{x}_{1t}, \quad m_{2t} = \hat{x}_{2t}$$

определяют оценки амплитуды и фазы радиосигнала (26).

Нетрудно решить (при помощи полученных выше рекуррентных алгоритмов) аналогичную задачу для дискретного времени, т. е. синтезировать систему совместного обнаружения и фильтрации флюктуирующих радиоимпульсов (см. [90]).

4.3.4. Марковский гауссовский сигнал (многомерный случай). Рассмотрим теперь более общий случай, при котором сигнал $S(\mathbf{x}_t, t)$ является линейной комбинацией компонент m-мерного марковского гауссов-

ского процесса $\{\mathbf{x}_t\}=\{x_{1t}, \ldots, x_{mt}\}$. Используя матричную форму записи, положим

$$S(\mathbf{x}_t, t)=\mathbf{C}_t\mathbf{x}_t, \tag{4.3.34}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_t=\mathbf{F}_t\mathbf{x}_t+\mathbf{G}_t\zeta_t, \tag{4.3.35}$$

где $\mathbf{C}_t$, $\mathbf{F}_t$, $\mathbf{G}_t$ — детерминированные матрицы, зависящие в общем случае от времени, имеющие порядок $(1\times m)$, $(m\times m)$, $(m\times m)$ соответственно. Векторный процесс ζ_t является гауссовским, для которого

$$M\zeta_t=0, \qquad M\zeta_t\zeta^T_{t+\tau}=\mathbf{Q}\delta(\tau). \tag{4.3.36}$$

Наблюдаемый процесс определяется формулой (4.2.1) с заменой $S(x_t, t)$ на (34). Так как y_t является линейной комбинацией гауссовских компонент сигнала и гауссовского белого шума ζ_t, то АПВ $w_t(\mathbf{x})=$ $=p(\mathbf{x}_t|y_0^t, \theta=1)$ по-прежнему (как и в предыдущих примерах) остается гауссовской. При этом ее можно записать в виде

$$w_t(\mathbf{x})=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\det{}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}_t\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_t)^T\mathbf{K}_t^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_t)\right\}, \tag{4.3.37}$$

где

$$\mathbf{m}_t=M[\mathbf{x}_t|y_0{}^t, \theta=1]=\widehat{\mathbf{x}}_t, \tag{4.3.38}$$

$$\mathbf{K}_t=M[(\mathbf{x}_t-\mathbf{m}_t)(\mathbf{x}_t-\mathbf{m}_t)^T|y_0{}^t, \theta=1]. \tag{4.3.39}$$

Матрицы коэффициентов переноса и диффузии процесса $\mathbf{x}_t$ согласно (1.2.54) и (35), (36) равны:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)=\left\|\begin{matrix} a_1(\mathbf{x}, t)\\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}, t)\end{matrix}\right\|=\mathbf{F}_t\mathbf{x},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)=\left\|\begin{matrix} b_{11}(\mathbf{x}, t), \ldots, b_{1m}(\mathbf{x}, t)\\ \vdots \\ b_{m1}(\mathbf{x}, t), \ldots, b_{mm}(\mathbf{x}, t)\end{matrix}\right\|=\mathbf{G}_t\mathbf{Q}\mathbf{G}_t^T. \tag{4.3.40}$$

Конкретизируя (4.2.27), (4.2.28), (4.2.31) с учетом (37), (40), получим симметризованные уравнения совместного обнаружения и фильтрации для рассматриваемого случая:

$$\dot{\mathbf{K}}_t=\mathbf{F}_t\mathbf{K}_t+\mathbf{K}_t\mathbf{F}^T-\frac{1}{N}\mathbf{K}_t\mathbf{G}_t^T\mathbf{C}_t\mathbf{K}_t+\mathbf{G}_t\mathbf{Q}\mathbf{G}_t^T, \tag{4.3.41}$$

$$\dot{\mathbf{m}}_t=\mathbf{F}_t\mathbf{m}_t+\frac{1}{N}\mathbf{K}_t\mathbf{C}_t^T(y_t-\mathbf{C}_t\mathbf{m}_t), \tag{4.3.42}$$

$$\dot{z}_t=\frac{1}{N}\mathbf{C}_t\mathbf{m}_t y_t-\frac{1}{2N}(\mathbf{C}_t\mathbf{m}_t)^2-\frac{1}{2N}\mathbf{C}_t\mathbf{K}_t\mathbf{C}_t^T. \tag{4.3.43}$$

В уравнение (41), определяющее матрицу (39), наблюдаемый процесс y_t не входит, так что оно не является стохастическим. Это уравнение — нелинейное матричное дифференциальное уравнение Риккати. Линейное стохастическое уравнение (42) определяет оптимальные оценки (38). Симметризованная форма записи (42) совпадает с формой Ито (поскольку матрица коэффициентов диффузии, как следует из (42) и (40), не зависит от $\mathbf{m}_t$). Что касается уравнения в форме Ито для ЛП

z_T, то оно может быть получено из симметризованного уравнения (43), если из правой части (43) исключить член $\frac{1}{2N}\mathbf{C}_t\mathbf{K}_t\mathbf{C}_t^T$.

Отметим, что уравнения совместного обнаружения и фильтрации, полученные в пп. 4.3.2 и 4.3.3, являются частными случаями уравнений (41)—(43) (нужно только иметь в виду, что в указанных параграфах вместо уравнений для $\mathbf{K}_t$ приведены эквивалентные уравнения для $\|h_{ijt}\|=\mathbf{K}_t^{-1}$). Уравнения линейной оптимальной фильтрации типа (41), (42) часто называют уравнениями Калмана — Бьюси [47]. Однако следует иметь в виду, что эти уравнения вытекают (как частный случай) из более ранних работ Стратоновича [117, 118] по нелинейной фильтрации.

4.3.5. Обобщенный телеграфный сигнал. Рассмотрим теперь пример, когда полезный сигнал x_t принадлежит к классу негауссовских процессов. Пусть $\{x_t\}$ является цепью Маркова с двумя состояниями $x^1=a$, $x^2=-a$ и непрерывным временем. Априорные вероятности $P_t(\pm a)=$ $=P(x_t \pm a)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{P}_t(a)=-\mu P_t(a)+\nu P_t(-a),\ \dot{P}_t(-a)=\mu P_t(a)-\nu P_t(-a), \quad (4.3.44)$$

где μ, ν определяют заданные вероятности перехода в единицу времени из состояния $+a$ в состояние $-a$ и из состояния $-a$ в состояние $+a$ соответственно. Процесс $\{x_t\}$ представляет собой последовательность положительных и отрицательных импульсов одинаковой амплитуды a, но случайной длительности. Этот процесс называется обобщенным телеграфным сигналом.

Параметры μ и ν, как нетрудно видеть, совпадают с параметрами $q_{\beta\alpha}$, определяющими однородный марковский процесс (см. п. 1.2.4):

$$\mu=q_{12}, \qquad \nu=q_{21}. \quad (4.3.45)$$

При этом согласно (1.2.23) и (45)

$$q_1=q_{11}=\mu, \qquad q_2=q_{22}=\nu. \quad (4.3.46)$$

Учитывая (45), (46), а также то, что $S(x')=a$, $S(x^2)=-a$, конкретизируем уравнения (4.2.33), (4.2.34); используя затем нормировку апостериорных вероятностей $w_t(+a)+w_t(-a)=1$, получим симметризованные уравнения совместного обнаружения и фильтрации [90]

$$\dot{w}_t(+a)=-\dot{w}_t(-a)=-\mu w_t(+a)+\nu w_t(-a)+(2a/N)\,y_t w_t(+a)\,w_t(-a), \quad (4.3.47)$$

$$\dot{z}_t=(a/N)\,y_t\,[w_t(+a)-w_t(-a)]-a^2/2N.$$

Целесообразно записать эти уравнения таким образом, чтобы в них непосредственно входила оптимальная оценка сигнала x_t. БСО $m_t=\hat{x}_t$ равна

$$m_t=\mathbf{M}\,[x_t\,|\,y_0{}^t,\ \theta=1]=aw_t(+a)-aw_t(-a). \quad (4.3.48)$$

Используя это соотношение и условие нормировки, преобразуем (47) к виду

$$\dot{m}_t=\frac{1}{N}(a^2-m_t^2)\,y_t-(\mu+\nu)\,m_t+a(\nu-\mu), \quad (4.3.49)$$

$$\dot{z}_t=(1/N)\,m_t y_t-a^2/2N. \quad (4.3.50)$$

На рис. 4.5 представлена структурная схема оптимальной системы совместного обнаружения и фильтрации, моделирующая уравнения (49), (50). Поскольку сигнал является негауссовским, то естественно, что блок оптимальной фильтрации оказался нелинейным (см. (49)). Блок формирования z_t осуществляет корреляцию наблюдаемых данных с оценкой m_t (см. (50)). По сравнению с аналогичными блоками предыдущих примеров он является самым простым, причем в наиболее прозрачной форме выражающим сущность оценочно-коррелированного приема.

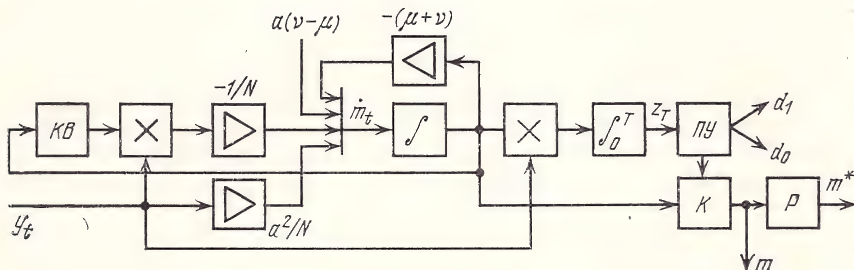


Рис. 4.5

Отметим, что в данном случае оценка m_t, оптимальная в среднеквадратическом смысле, не совпадает с оценкой m^*_t, оптимальной по максимуму апостериорной вероятности. Последняя, как нетрудно видеть, равна

$$m^*_t = a\,\mathrm{sign}\,[w_t(+a) - w_t(-a)],$$

или согласно (48)

$$m^*_t = a\,\mathrm{sign}\,m_t.$$

Таким образом, для получения оценки m^*_t нужно после ключевого блока К (рис. 4.5) поставить пороговую схему Р (реле), реагирующую соответствующим образом на изменение знака функции m_t. Используя предыдущие общие результаты, можно найти также уравнения совместного обнаружения и фильтрации в форме Ито. Конкретизируя (4.2.24), (4.2.25) (с учетом п. 4.2.6), получим уравнение для оценки (48):

$$\dot{m}_t = -(m_t/N)(a^2 - m_t^2) + (y_t/N)(a^2 - m_t^2) - (\mu + \nu) m_t + a(\nu - \mu). \quad (4.3.51)$$

Уравнение для ЛП имеет вид (4.3.16). Отметим, что в рассматриваемом примере не только уравнение для ЛП, но и уравнение фильтрации в форме Ито (51) не совпадают с соответствующими симметризованными (50), (49).

4.3.6. Квазидетерминированные сигналы. Рассматривая вначале случай дискретного времени, определим наблюдаемый процесс $\{y_i\}$ соотношением

$$y_i = \theta S(x, t_i) + \xi_i, \quad \theta = 0, 1; \; i = 1, \dots, n, \quad (4.3.52)$$

где шум ξ_i — тот же, что и в (4.1.1), а параметр x сигнала $S(x, t)$ есть случайная величина, плотность вероятностей которой равна $w_0(x)$.

Поскольку квазидетерминированный сигнал $S(x, t_i)$ является вырожденным частным случаем стохастического сигнала (см. п. 1.5.5), то алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации для рассматриваемой задачи (52) можно получить непосредственно из предыдущих об-

щих результатов. Так, используя (1.5.18), из (4.1.12), (4.1.13) получаем рекуррентные соотношения для АПВ $w_k(x)=p(x|y_1^k, \theta=1)$ и ОП Λ_k [104]:

$$w_{k+1}(x)=\frac{\rho[y_{k+1}-S(x, t_{k+1})]\, w_k(x)}{\int \rho[y_{k+1}-S(x, t_{k+1})]\, w_k(x)dx},$$

$$\Lambda_{k+1}=\frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1})}\int \rho[y_{k+1}-S(x, t_{k+1})]\, w_k(x)\, dx, \qquad (4.3.53)$$

$$k=0, 1, \ldots, n-1; \quad \Lambda_0=1.$$

Отметим, что ОП для случая квазидетерминированных сигналов в ряде примеров можно вычислить и обычным нерекуррентным способом, усредняя условное ОП согласно (2.2.19). Для этого нужно взять интеграл

$$\Lambda_n=\int \Lambda_n(y|x)\, w_0(x)\, dx, \qquad (4.3.54)$$

где

$$\Lambda_n(y|x)=\frac{p(y_1^n|x, \theta=1)}{p(y_1^n|\theta=0)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}\rho[y_k-S(x, t_k)]}{\prod_{k=1}^{n}\rho(y_k)}. \qquad (4.3.55)$$

ОП Λ_n, определенное последовательным образом при помощи (53), конечно, совпадает с Λ_n, даваемым формулами (54), (55) (в этом можно непосредственно убедиться, если «свернуть» рекуррентные соотношения (53)). В то же время рекуррентный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с нерекуррентным. В частности, первый дает метод синтеза оптимальной системы, которая наряду с обнаружением сигнала осуществляет оценку его параметров. Так, например, БСО параметра x при k-м наблюдении равна

$$\hat{x}=\mathrm{M}[x|y_1^k, \theta=1]=\int x w_k(x)\, dx.$$

Формулы (54), (55) такого метода не дают.

Кроме того, на вид алгоритмов (54), (55) существенное влияние оказывает априорная информация о параметре сигнала, т. е. плотность вероятностей $w_0(x)$, которая должна быть известна. В то же время структура рекуррентных алгоритмов (53) непосредственно не зависит от $w_0(x)$. Последнее, однако, не означает, что плотность $w_0(x)$ вообще не влияет на обработку сигналов, — она определяет начальные условия для рекуррентных алгоритмов (53). Тем не менее, отмеченное обстоятельство, а также инвариантность рекуррентных алгоритмов относительно времени наблюдения сыграют полезную роль при решении задач, для которых априорная информация о параметре квазидетерминированных сигналов известна не полностью (см. гл. 12).

В том случае, когда не требуется оценивать параметр x сигнала $S(x, t)$ и когда априорная плотность $w_0(x)$ известна, может оказаться, что синтез оптимального обнаружителя квазидетерминированных сигналов целесообразно осуществлять по формулам (54), (55), а не по (53),

поскольку первые могут привести к технически более простой схеме обработки. В литературе имеется множество примеров синтеза обнаружителей квазидетерминированных сигналов (в гауссовском шуме) согласно (54), (55).

Сделанные замечания о сравнении рекуррентного и нерекуррентного способов обработки сигналов остаются в силе и для случая непрерывного времени.

Переходя в (53) к непрерывному времени, придем при симметризованной записи к уравнениям (4.2.27), (4.2.28), (4.2.30), в которых оператор

$$L=\frac{1}{N}S(x,\ t)\left[y_t-\frac{1}{2}S(x,\ t)\right]. \tag{4.3.56}$$

Этот же результат следует и непосредственно из (4.2.27)—(4.2.30), если учесть (1.5.19).

Используя (4.2.23)—(4.2.25) и (1.5.19), получим уравнение нелинейной фильтрации квазидетерминированных сигналов в форме Ито

$$\dot{w}_t(x)=\mathscr{L}(w_t)\,w_t(x), \tag{4.3.57}$$

где $\mathscr{L}(w_t)$ определяется формулой (4.2.25). При этом уравнение для ЛП имеет прежний вид (4.2.15).

В тех случаях, когда параметр сигнала $S(\mathbf{x},\ t)$ является векторной величиной, нужно в (53)—(57) заменить x на $\mathbf{x}$ (см. также п. 4.1.7 и п. 4.2.4).

Итак, соотношения (53), (4.2.27), (4.2.28), (4.2.30) и (56), (57), (4.3.25), (4.2.15) определяют структуру оптимальной системы, осуществляющей совместное обнаружение и фильтрацию (оценку) квазидетерминированных сигналов (в дискретном и непрерывном времени и для обеих форм записи стохастических уравнений). Эти соотношения являются частными случаями алгоритмов, полученных в § 4.1 и 4.2.

Полученные алгоритмы совместного обнаружения и оценки охватывают все встречающиеся на практике квазидетерминированые функции (сигналы). Сюда относятся, в частности, радиоимпульсы со случайными параметрами, полиномы со случайными коэффициентами и т. д. Из всего множества примеров, которые решаются при помощи приведенных алгоритмов, мы здесь остановимся лишь на двух, причем ограничимся случаем непрерывного наблюдения.

Рассмотрим сигнал $A\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ со случайной амплитудой. Предположим, что частота ω_0 и фаза φ_0 известны (пусть $\varphi_0=0$), а A является гауссовской случайной величиной, причем $\mathbf{M}A=0$, $\mathbf{M}A^2=\sigma^2$. (Эти предположения специально сделаны совпадающими с [24], где рассмотрена задача оценки параметра такого же сигнала.)

Нетрудно конкретизировать уравнения (4.2.27), (4.2.28), (56) применительно к данному сигналу. Однако этого можно и не делать, если учесть, что исследуемый пример является простым частным случаем уже разобранного в п. 4.3.2. Действительно, случайную величину A можно рассматривать как вырожденный процесс $\{x_t\}$, описываемый уравнением (17), для которого $\gamma=\varkappa=0$, а начальное условие совпадает с A. Поэтому, полагая в (25) $\gamma=\varkappa=0$, а также $C_{1t}=\sin\omega_0 t$, $C_{2t}=0$, сра-

зу находим нужные нам уравнения для достаточных статистик

$$\dot{h}_t = \frac{1}{N}\sin^2\omega_0 t,$$

$$\dot{m}_t = -\frac{m_t}{Nh_t}\sin^2\omega_0 t + \frac{y_t}{Nh_t}\sin\omega_0 t, \qquad (4.3.58)$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N} m_t \sin\omega_0 t - \frac{1}{2N} m_t^2 \sin^2\omega_0 t - \frac{1}{2Nh_t}\sin^2\omega_0 t.$$

Эти уравнения определяют структурную схему оптимальной системы совместного обнаружения гармонического сигнала и оценки его амплитуды (при моделировании (58) члены, содержащие $\cos 2\omega_0 t$, целесообразно опустить).

Одним из важных положительных качеств рассматриваемого метода является то, что для синтеза систем не требуется решения уравнения для достаточных статистик. Дифференциальные уравнения можно моделировать непосредственно. Если же при синтезе используется аппарат интегральных уравнений, то, как уже отмечалось в п. 3.1.2, эти уравнения необходимо вначале решить (прежде чем моделировать), что само по себе представляет довольно трудную задачу.

Итак, хотя решать, например, уравнения (58), в рамках излагаемого метода и необязательно, все же найдем явное выражение для оценки амплитуды $m_t = \hat{A}$ (в целях сравнения с [24]). Решая (58) с учетом начальных условий $h_0 = 1/\sigma^2$, $m_0 = 0$, получим

$$\dot{m}_t = K_t \int_0^t y_\tau \sin\omega_0\tau d\tau,$$

где

$$K_t = (N/\sigma^2 + t/2 - \sin 2\omega_0 t/4\omega_0)^{-1}.$$

Найденная оценка совпадает с результатом [24] (см. (5.21)), полученным иным методом, при котором процедура решения соответствующего интегрального уравнения для синтеза устройства оценки была необходима.

Рассмотрим теперь радиосигнал со случайными амплитудой и фазой

$$A\cos(\omega_0 t - \varphi) = x_1\cos\omega_0 t + x_2\sin\omega_0 t = S(x_1,\ x_2,\ t). \qquad (4.3.59)$$

Предположим, что A и φ являются независимыми случайными величинами, причем A распределена по закону Релея с параметром $\mathbf{M}A^2 = 2\sigma^2$, а φ — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$. При этом компоненты x_1 и x_2 будут, как известно, независимыми гауссовскими величинами, для которых

$$\mathbf{M}x_1 = \mathbf{M}x_2 = 0,\ \mathbf{M}x_1^2 = \mathbf{M}x_2^2 = \sigma^2. \qquad (4.3.60)$$

Данная модель сигнала широко применяется в радиотехнике.

Нетрудно убедиться, что рассматриваемый пример является частным случаем задачи п. 4.3.3. при $\gamma = \varkappa = 0$. Учитывая это, из (29)—(31) получаем

$$\dot{h}_t = 1/2N,$$

$$\dot{m}_{1t} = -(1/2Nh_t)m_{1t} + (1/Nh_t)y_t\cos\omega_0 t,$$

$$(4.3.61)$$

$$\dot{m}_{2t} = -(1/2Nh_t)m_{2t} + (1/Nh_t)y_t\sin\omega_0 t,$$

$$\dot{z}_t = (y_t/N)(m_{1t}\cos\omega_0 t + m_{2t}\sin\omega_0 t) - (1/4N)(m_{1t}^2 + m_{2t}^2) - 1/2Nh_t.$$

Здесь учтено, что $h_{12}(0)=0$ и что в силу одинаковых начальных условий (60) $h_{11t}=h_{22t}=h_t$.

Структурная схема системы совместного обнаружения и оценки параметров радиосигнала (59), описываемая уравнениями (61), аналогична схеме, представленной на рис. 4.4. Последняя моделирует также приемник флюктуирующего радиосигнала в стационарном режиме согласно (32), (33). При внешнем сходстве схем этих двух приемников между ними имеется, однако, существенное отличие. Дело в том, что параметр цепочек RC в схеме, моделирующей (61), является переменным:

$$\alpha(t)=\left(\frac{2N}{\sigma^2}+t\right)^{-1}.$$

В схеме же, моделирующей уравнения (32), этот параметр — постоянный, что явилось следствием стационарного режима работы. Рассмотрение такого режима в п. 4.3.3, упрощающего схему, имело определенный смысл, поскольку там параметры радиосигнала представляли собой случайные процессы (а не случайные величины, как здесь).

Устройство, моделирующее (61), само переходит в стационарный режим в процессе своей работы. К этому свойству сходимости, которое присуще рассматриваемым алгоритмам, мы вернемся позднее в гл. 12 (данный вопрос тесно связан с проблемой обработки сигналов при априорной неопределенности).

Глава 5

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБНАРУЖЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

Шум с независимыми значениями, применительно к которому велось изложение в предыдущей главе, конечно не исчерпывает класс случайных помех. Многие виды помех (как естественного, так и искусственного происхождения) необходимо рассматривать как коррелированные случайные процессы (например, пассивные помехи, вызываемые переотражениями радиосигналов от местных предметов; пассивные помехи, создаваемые дипольными отражателями; активные узкополосные помехи и т. д.). При этом распределение вероятностей помех может быть гауссовским и негауссовским.

В настоящей главе излагаются методы синтеза оптимальных систем совместного обнаружения и фильтрации сигналов на фоне коррелированных помех. В одной из общих постановок задачи сигнал и помеха являются функциями некоторых компонент многомерного марковского процесса, при этом они могут быть гауссовскими и негауссовскими, аддитивными и неаддитивными. Рассматриваются примеры.

В главе наряду с двухальтернативными задачами рассматриваются многоальтернативное совместное обнаружение и фильтрация сигналов (§ 5.4).

5.1.1. Аддитивные и неаддитивные помехи. Пусть наблюдается последовательность случайных величин $y(t_1), \ldots, y(t_i), \ldots, y(t_n)$; при этом

$$y(t_i) \equiv y_i = \begin{cases} \Phi(x_i, \eta_i, t_i), & \text{при } \theta = 1 \\ V(\eta_i, t_i), & \text{при } \theta = 0. \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.1.1}$$

Параметр x_i полезного сигнала и параметр η_i помехи $V(\eta_i, t_i)$ являются марковскими процессами с дискретным временем и непрерывным фазовым пространством, для которых переходные плотности вероятностей обозначим через $\pi(x_{i+1}|x_i)$, $\rho_\eta(\eta_{i+1}|\eta_i)$, а начальные плотности — через $\pi(x_1)$ и $\rho_\eta(\eta_1)$ соответственно. Параметр θ имеет прежний смысл (см. п. 4.1.1). Предполагается, что для функций Φ и V, которые определяют вид сигнала и помехи, существуют однозначные обратные функции Q, N, так что

$$\eta_i = \begin{cases} Q(y_i, x_i, t_i), & \text{при } \theta = 1 \\ N(y_i, t_i), & \text{при } \theta = 0. \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим

$$Q^*(y_i, x_i, t_i) = \left| \frac{\partial}{\partial y_i} Q(y_i, x_i, t_i) \right|, \quad N^*(y_i, t_i) = \left| \frac{\partial}{\partial y_i} N(y_i, t_i) \right|$$

(предполагается, конечно, существование этих производных в области изменения $\{y_i\}$). Тогда плотность распределения вероятностей случайных величин $x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_{k+1}, \theta$ можно представить в виде

$$p(x_1^{k+1}, y_1^{k+1}, \theta) = p_1 \prod_{i=1}^{k} \rho_\eta [Q(y_{i+1}, x_{i+1}) | Q(y_i, x_i)] Q^*(y_{i+1}, x_{i+1}) \times$$
$$\times \rho_\eta [Q(y_1, x_1)] Q^*(y_1, x_1) \pi(x_1) \prod_{i=1}^{k} \pi(x_{i+1}|x_i) \delta(\theta - 1) +$$
$$+ p_0 \prod_{i=1}^{k} \rho_\eta [N(y_{i+1}) | N(y_i)] N^*(y_{i+1}) \rho_\eta [N(y_1)] N^*(y_1) \prod_{i=1}^{k+1} \delta(x_i) \delta(\theta) \tag{5.1.2}$$

(в целях сокращения записи формул временной параметр t здесь и в дальнейшем, как правило, опускаем). Используя (2), при помощи метода п. 4.1.2 найдем рекуррентные соотношения для АПВ $w_k(x_k) = p(x_k|y_1^k, \theta=1)$ и для ОП Λ_k. Опуская выкладки, приведем окончательный результат [89]

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\int \rho_\eta [Q(y_{k+1}, x_{k+1}) | Q(y_k, x_k)] \times Q^*(y_{k+1}, x_{k+1}) \pi(x_{k+1}|x_k) w_k(x_k) dx_k}{\iint \rho_\eta [Q(y_{k+1}, x_{k+1}) | Q(y_k, x_k)] \times Q^*(y_{k+1}, x_{k+1}) \pi(x_{k+1}|x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1}}, \tag{5.1.3}$$

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho_\eta [N(y_{k+1}) | N(y_k)] N^*(y_{k+1})} \iint \rho_\eta [Q(y_{k+1}, x_{k+1}) | Q(y_k, x_k)] \times$$
$$\times Q^*(y_{k+1}, x_{k+1}) \pi(x_{k+1}|x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.1.4}$$

Начальные значения определяются выражениями

$$w_1(x_1) = \frac{\rho_\eta[Q(y_1,\ x_1)]\,Q^*(y_1,\ x_1)\,\pi(x_1)}{\int \rho_\eta[Q(y_1,\ x_1)]\,Q^*(y_1,\ x_1)\,\pi(x_1)\,dx_1}, \qquad (5.1.5)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\rho_\eta[N(y_1)]\,N^*(y_1)} \int \rho_\eta[Q(y_1,\ x_1)]\,Q^*(y_1,\ x_1)\,\pi(x_1)\,dx_1.$$

Соотношения (3), (4) составляют основу для построения оптимальных алгоритмов совместного обнаружения и фильтрации коррелированных сигналов на фоне коррелированных помех.

В общем случае помеха может воздействовать на сигнал неаддитивным образом. Так, в радиотехнических задачах помеха иногда носит мультипликативный характер. Если, например, положить

$$\Phi(x_k,\ \eta_k,\ t_k) = S(x_k,\ t_k)\,\eta_k, \qquad V(\eta_k,\ t_k) = \eta_k,$$

то будем иметь

$$Q(y_k,\ x_k,\ t_k) = y_k/S(x_k,\ t_k),$$

$$Q^*(x_k) = 1/|S(x_k,\ t_k)|,\ N(y_k) = y_k,\ N^* = 1.$$

Подставляя эти соотношения в (3), (4), получим алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации применительно к случаю мультипликативной коррелированной помехи.

Если помеха аддитивна и, например,

$$\Phi(x_k,\ \eta_k,\ t_k) = S(x_k,\ t_k) + \eta_k,\ V(\eta_k,\ t_k) = \eta_k,$$

то в (3), (4) нужно подставить

$$Q(y_k,\ x_k,\ t_k) = y_k - S(x_k,\ t_k),\quad N(y_k) = y_k,\quad Q^* = N^* = 1. \qquad (5.1.5')$$

Если к тому же перейти к помехе с независимыми значениями, положив $\rho_\eta(\eta_{k+1}\,|\,\eta_k) = \rho(\eta_{k+1})$, то получающиеся при этом алгоритмы совпадут с (4.1.12), (4.1.13).

Интерпретация системы совместного обнаружения и фильтрации, определяемой соотношениями (3), (4), аналогична случаю некоррелированных помех (см. п. 4.1.5).

5.1.2. **Учет шума с независимыми значениями.** На практике при приеме сигнала на него наряду с возможно коррелированной помехой обычно воздействует и некоррелированная. В частности, в качестве некоррелированной помехи выступает собственный шум приемника. Поэтому для более полного учета реальной ситуации необходимо рассмотреть и этот случай. Заметим, что неучет шума с независимыми значениями может приводить к парадоксам обнаружения (при непрерывном времени).

Итак, пусть наблюдаемый процесс определяется соотношением

$$y_i = \begin{cases} \Phi(x_i,\ \eta_i,\ t_i) + \xi_i, & \text{при } \theta = 1 \\ V(\eta_i,\ t_i) + \xi_i, & \text{при } \theta = 0 \end{cases} \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ n. \qquad (5.1.6)$$

Марковские процессы $\{x_i\}$, $\{\eta_i\}$ — параметры сигнала и помехи — задаются так же, как и в п. 5.1.1. Процесс с независимыми значениями $\{\xi_i\}$ — некоррелированный шум — определяется плотностью вероятностей $\rho(\xi_i)$. Отметим, что при излагаемом ниже способе решения задачи ограничение п. 5.1.1 на функции Φ и V, связанное с существованием однозначных обратных функций, можно снять.

Рассмотрим двухкомпонентный марковский процесс $\{x_i, \eta_i\}$. Поскольку процессы $\{x_i\}$ и $\{\eta_i\}$ предполагаются статистически независимыми между собой *), то их совместная переходная плотность

$$\pi_{x\eta}(x_k, \eta_k \mid x_{k-1}, \eta_{k-1}) = \pi(x_k \mid x_{k-1})\, \rho_\eta(\eta_k \mid \eta_{k-1}). \qquad (5.1.7)$$

Введем апостериорные плотности вероятностей

$$w_{1k}(x_k, \eta_k) = p(x_k, \eta_k \mid y_1^k, \theta = 1), \qquad w_{0k}(\eta_k) = p(\eta_k \mid y_1^k, \theta = 0). \qquad (5.1.8)$$

Используя результаты п. 4.1.2, 4.1.7 и учитывая (7), получим рекуррентные соотношения для АПВ (8):

$$w_{1,k+1}(x_{k+1}, \eta_{k+1}) = \frac{\iint \rho\,[y_{k+1} - \Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) \times w_{1k}(x_k, \eta_k)\, dx_k d\eta_k}{\iiiint \rho\,[y_{k+1} - \Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) \times w_{1k}(x_k, \eta_k)\, dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1}}, \qquad (5.1.9)$$

$$w_{0,k+1}(\eta_{k+1}) = \frac{\int \rho\,[y_{k+1} - V(\eta_{k+1})]\, \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k)\, w_{0k}(\eta_k)\, d\eta_k}{\iint \rho\,[y_{k+1} - V(\eta_{k+1})]\, \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k)\, w_{0k}(\eta_k)\, d\eta_k d\eta_{k+1}}. \qquad (5.1.10)$$

Запишем ОП для проблемы (6) в следующем виде:

$$\Lambda_k = \frac{p(y_1^k \mid \theta = 1)}{\prod_{i=1}^{k} \rho(y_i)} \left(\frac{p(y_1^k \mid \theta = 0)}{\prod_{i=1}^{k} \rho(y_i)} \right)^{-1} = \frac{\Lambda_{1k}}{\Lambda_{0k}}.$$

Здесь Λ_{1k}, Λ_{0k} — ОП в задачах обнаружения на фоне шума ξ_i процессов $\Phi(x_i, \eta_i, t_i)$ и $V(\eta_i, t_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ соответственно. Для Λ_{1k} и Λ_{0k} запишем соотношения типа (4.1.13), в которые войдут АПВ (8). Поделив затем одно на другое, получим

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k \frac{\iiiint \rho\,[y_{k+1} - \Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1})]\, \pi(x_{k+1} \mid x_k) \times \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k)\, w_{1k}(x_k, \eta_k)\, dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1}}{\iint \rho\,[y_{k+1} - V(\eta_{k+1})]\, \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) \times w_{0k}(\eta_k)\, d\eta_k d\eta_{k+1}}. \qquad (5.1.11)$$

Найденные соотношения (9)—(11) дают оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации сигналов при наличии коррелированной помехи и шума с независимыми значениями. Отметим, что здесь ОП определяется при помощи трех рекуррентных соотношений, а не двух, как это было в предыдущих общих задачах. Вместе с дополнительным алгоритмов (см. (10)), согласно которому формируется АПВ помехи, появилась новая операция при обнаружении сигнала: фильтрация помехи из шума. Найденный способ обработки будет подробнее обсужден в задачах с непрерывным временем, где это можно сделать нагляднее.

5.1.3. Дискретные сигналы и помехи. В связи с развитием цифровой техники все чаще приходится иметь дело с дискретными сигналами.

---

*) Это ограничение не является принципиальным, и в дальнейшем оно будет снято (см. п. 5.2.3).

В частности, широкое распространение получают смешанные системы связи, в которых непрерывная информация передается при помощи сигналов, образующих дискретную последовательность. Интенсивно развиваются цифровые методы в радиолокации [58, 70]. Поэтому задачи, связанные с оптимизацией обработки дискретных сигналов, являются актуальными.

В предыдущей главе уже рассматривались оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации дискретных сигналов (шум некоррелированный). При этом отмечалась довольно прозрачная аналогия, алгоритмами для непрерывных сигналов (см. п. 4.1.10). Такое же положение сохраняется и в задачах настоящей главы.

Так, если параметр сигнала $S(x, t)$ представляет собой дискретную однородную цепь Маркова (см. п. 1.2.2) с l состояниями и переходными вероятностями $\pi_{\beta\alpha}$, а марковская помеха η аддитивна, причем ее значения непрерывны, то соотношения (3), (4) переходят в алгоритмы следующего вида:

$$w_{k+1}(x^{\alpha}) = \frac{\sum\limits_{\beta=1}^{l} \rho_{\eta}[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1}) \,|\, y_k - S(x^{\beta}, t_k)]\, \pi_{\beta\alpha} w_k(x^{\beta})}{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{l} \rho_{\eta}[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1}) \,|\, y_k - S(x^{\beta}, t_k)]\, \pi_{\beta\alpha} w_k(x^{\beta})},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{5.1.12}$$

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho_{\eta}(y_{k+1} \,|\, y_k)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \rho_{\eta}[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1}) \,|\, y_k - S(x^{\beta}, t_k)]\, \pi_{\beta\alpha} w_k(x^{\beta}).$$

На практике могут возникать ситуации, когда помеха подобна полезному сигналу и носит дискретный характер (например, искусственная). Так, если помеха $V(\eta, t)$ аддитивна и ее параметр является дискретной цепью Маркова (как и параметр сигнала, причем в наблюдаемые данные входит шум с независимыми непрерывными значениями, то соотношения (9)—(11) переходят в алгоритмы

$$w_{1,k+1}(x^{\alpha}, \eta^{\varkappa}) = \frac{\rho[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1}) - V(\eta^{\varkappa}, t_{k+1})] \times \sum\limits_{\beta,\gamma=1}^{l,R} \pi_{\beta\alpha} \rho_{\gamma\varkappa} w_k(x^{\beta}, \eta^{\gamma})}{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{l} \sum\limits_{\gamma,\varkappa=1}^{R} \rho[y_{k+1} - S(x^{\alpha}, t_{k+1}) - V(\eta^{\varkappa}, t_{k+1})] \times \pi_{\beta\alpha} \rho_{\gamma\varkappa} w_k(x^{\beta}, \eta^{\gamma})}; \tag{5.1.13}$$

$$w_{0,k+1}(\eta^{\varkappa}) = \frac{\rho[\eta_{k+1} - V(\eta^{\varkappa}, t_{k+1})] \sum\limits_{\gamma=1}^{R} \rho_{\gamma\varkappa} w_{0k}(\eta^{\gamma})}{\sum\limits_{\gamma,\varkappa=1}^{R} \rho[y_{k+1} - V(\eta^{\varkappa}, t_{k+1})]\, \rho_{\gamma\varkappa} w_{0k}(\eta^{\gamma})};$$

$$\alpha = 1, \ldots, l; \quad \varkappa = 1, \ldots, R;$$

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k \frac{\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{l}\sum\limits_{\gamma,\varkappa=1}^{R} \rho\,[y_{k+1}-S(x^\alpha,\ t_{k+1})-V(\eta^\varkappa,\ t_{k+1})]\,\pi_{\beta\alpha}\,\rho_{\gamma\varkappa}\,w_k(x^\beta,\ \eta^\gamma)}{\sum\limits_{\gamma,\varkappa=1}^{R} \rho\,[y_{k+1}-V(\eta^\varkappa,\ t_{k+1})]\,\rho_{\gamma\varkappa}\,w_{0k}(\eta^\gamma)},$$

$$k=1,\ 2,\ldots,\ n-1.$$

Здесь $(\eta^1,\ldots,\eta^R)$ — возможные значения параметра помехи, $\rho_{\gamma\varkappa}$ — переходные вероятности этого параметра, $w_{1k}(x^\beta,\ \eta^\gamma)$, $w_{0k}(\eta^\gamma)$ — апостериорные вероятности значений параметров сигнала и помехи и одной помехи при $\theta=1$ и 0 соответственно.

Нетрудно записать также соответствующие алгоритмы и для случая, когда добавка к дискретной помехе в виде непрерывного некоррелированного шума отсутствует.

Заметим, что из соотношений (13) непосредственно вытекают алгоритмы для более простых задач. Так, например, иногда удовлетворительной моделью параметра сигнала (или помехи) может являться последовательность независимых дискретных случайных величин.

В этом случае нужно положить $\pi_{\beta\alpha}=\pi_\alpha$, $\rho_{\gamma\varkappa}=\rho_\varkappa$, где π_α, $\rho_\varkappa$ — априорные вероятности значений x^α, $\eta^\varkappa$ параметров сигнала и помехи. В результате алгоритмы (13) существенно упрощаются, так как суммы по β и γ исчезают (вследствие нормировки апостериорных вероятностей).

Отметим, что оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации (12), (13) можно моделировать непосредственно (функции ρ_η, ρ, S, V должны быть заданы), при этом никаких принципиальных трудностей не возникает. В то же время при реализации общих алгоритмов в случае непрерывных параметров (см. (3), (4), (9)—(11)) возникают существенные технические затруднения, связанные с моделированием интегралов и формированием АПВ как функции непрерывного параметра. Поэтому и приходится при конкретизации общих алгоритмов искать достаточные статистики, а также применять приближенные методы. Здесь же этих трудностей нет, поскольку вместо интегралов имеются суммы, а вместо АПВ — набор апостериорных вероятностей.

5.2. ОБЩИЕ АЛГОРИТМЫ (НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ)

В данном параграфе выводятся оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации для случая, когда сигнал и помеха протекают в непрерывном времени и при непрерывном наблюдении. При переходе к непрерывному времени учитывается белый гауссовский шум, ибо в отсутствии его можно прийти к сингулярному случаю, при котором вероятность вынести правильное решение в течение произвольно малого времени наблюдения равна единице. Последнее, разумеется, не может иметь места в реальных устройствах.

На полезный сигнал, кроме белого шума, воздействует также помеха, которая может быть гауссовской и негауссовской, аддитивной и неаддитивной. Добавление белого шума к помехе снимает сингуляр-

ность. Важно, что этот математический прием хорошо согласуется с реальной ситуацией, так как в приемниках всегда имеется собственный шум.

5.2.1. Уравнения для отношения правдоподобия. Перейдем к непрерывному времени в рекуррентном соотношении (5.1.11). Наблюдаемые данные (5.1.6) при непрерывном времени будут иметь вид

$$y_t = \begin{cases} \Phi(x_t,\ \eta_t,\ t) + \xi_t, & \text{при } \theta = 1 \\ V(\eta_t,\ t) + \xi_t, & \text{при } \theta = 1 \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.2.1}$$

где $\{x_t\}$, $\{\eta_t\}$ являются диффузионными марковскими процессами, и $\{\xi_t\}$ — белый гауссовский шум. (Отметим, что в (5.1.6) шум ξ_i мог быть гауссовским и негауссовским.)

Допредельный аналог белого шума определяется плотностью (4.2.2). Подставим (4.2.2) в (5.1.11) и разложим экспоненты в числителе и знаменателе в ряд по степени Δt.

Используя нормировку условных плотностей $\pi\rho_\eta w_{1k}$, $\rho_\eta w_{0k}$ и разложение

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$$

при малых x, приведем (5.1.11) к виду

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \Lambda_k \iiiint \left[\frac{\Delta t}{2N}(2y_{k+1}\Phi - \Phi^2) + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{2N^2}\Phi^2\right] \times$$

$$\times \pi\rho_\eta w_{1k} dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} \left\{1 - \iint \left[\frac{\Delta t}{2N}(2y_{k+1}V - V^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{2N^2} V^2\right] \rho_\eta w_{0k} d\eta_k d\eta_{k+1} + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{N^2}\left[\iint V\rho_\eta w_{0k} d\eta_k d\eta_{k+1}\right]^2\right\} + O[(\Delta t)^2] \tag{5.2.2}$$

(для сокращения записи аргументы функций опущены).

Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiiint \Phi(x_{k+1},\ \eta_{k+1},\ t_{k+1})\,\pi(x_{k+1} \mid x_k)\,\rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) \times$$
$$\times w_{1k}(x_k,\ \eta_k)\,dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} \equiv I.$$

Поскольку

$$\iint \pi\rho_\eta w_{1k} dx_k d\eta_k = \iint p(x_{k+1},\ x_k,\ \eta_{k+1}, \eta_k \mid y_1^k,\ \theta = 1)\,dx_k d\eta_k =$$
$$= p(x_{k+1},\ \eta_{k+1} \mid y_1^k,\ \theta = 1),$$

то $I = \iint \Phi(x_{k+1},\ \eta_{k+1},\ t_{k+1})\,p(x_{k+1}\eta_{k+1} \mid y_1^k,\ \theta = 1)\,dx_{k+1} d\eta_{k+1}$.

В пределе этот интеграл совпадает с апостериорным математическим ожиданием процесса $\Phi(x_t, \eta_t, t)$:

$$\mathrm{M}[\Phi(x_t,\ \eta_t,\ t) \mid y_0^t,\ \theta = 1] = \widehat{\Phi}_t. \tag{5.2.3}$$

Обозначим

$$\widehat{\Phi_t^2} = \mathrm{M}[\Phi^2(x_t,\ \eta_t,\ t) \mid y_0^t,\ \theta = 1], \tag{5.2.4}$$

$$\widehat{V}_{0t} = \mathrm{M}[V(\eta_t,\ t) \mid y_0^t,\ \theta = 0],\ \widehat{V_{0t}^2} = \mathrm{M}[V^2(\eta_t,\ t) \mid y_0^t,\ \theta = 0]. \tag{5.2.5}$$

Функционалы $\widehat{\Phi}_t$, $\widehat{\Phi_t^2}$, $\widehat{V}_{0t}$, $\widehat{V_{0t}^2}$ являются оптимальными оценками случайных функций Φ_t, Φ_t^2, V_t, V_t^2 в смысле минимума среднеквадратической

ошибки, полученными в результате наблюдения реализации $y_0{}^t$ при $\theta = 1$ и 0 соответственно. Если в них подставить наблюдаемые данные при значениях параметра θ, отличающихся от принятых в (3)—(4), то указанные функционалы станут псевдооценками (см. п. 4.1.3).

Теперь перейдем в (2) к пределу, устремляя $\Delta t \longrightarrow 0$. При этом, поступая аналогично п. 4.2.2, получим симметризованное стохастическое уравнение для ОП

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{1}{N} (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) \Lambda_t y_t - \frac{1}{2N} (\widehat{\Phi_t^2} - \widehat{V_{0t}^2}) \Lambda_t. \tag{5.2.6}$$

Если же использовать запись в форме Ито, то будем иметь

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{1}{N} (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) \Lambda_t y_t + \frac{1}{N} (\widehat{V}_{0t}^2 - \widehat{\Phi}_t \widehat{V}_{0t}) \Lambda_t. \tag{5.2.7}$$

Решения уравнений (6), (7) найдем, сделав замену $z_t = \ln \Lambda_t$. При симметризованной записи (6) дифференцирование осуществляется по обычным правилам, поэтому

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) y_t - \frac{1}{2N} (\widehat{\Phi_t^2} - \widehat{V_{0t}^2}), \tag{5.2.8}$$

а ОП в конечный момент наблюдения равно

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T (\widehat{\Phi_t^2} - \widehat{V_{0t}^2}) dt \right\} \tag{5.2.9}$$

(здесь учтено, что $\Lambda_0 = 1$). При записи уравнения в форме Ито дифференцирование производится по правилу (1.4.20). Применяя его к $\ln \Lambda_t$ с учетом (7), следуя при этом п. 4.2.2, получим

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) y_t - \frac{1}{2N} (\widehat{\Phi}_t^2 - \widehat{V}_{0t}^2), \tag{5.2.10}$$

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T (\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t}) y_t d^* t - \frac{1}{2N} \int_0^T (\widehat{\Phi}_t^2 - \widehat{V}_{0t}^2) dt \right\}. \tag{5.2.11}$$

Первые интегралы в формулах (9), (11) представляют собой симметризованный стохастический интеграл и стохастический интеграл в смысле Ито соответственно.

Найденные выражения (8)—(11) связывают ОП (и ЛП) с БСО сигналов и помех. В частном случае, когда помеха аддитивна:

$$\Phi(x_t, \eta_t, t) = S(x_t, t) + V(\eta_t, t), \tag{5.2.12}$$

в указанных выражениях нужно положить

$$\widehat{\Phi}_t = \widehat{S}_t + \widehat{V}_{1t}, \tag{5.2.13}$$

где

$$\widehat{S}_t = M[S(x_t, t) | y_0{}^t, \theta = 1], \quad \widehat{V}_{1t} = M[V(\eta_t, t) | y_0{}^t, \theta = 1]. \tag{5.2.14}$$

Аналогичным образом конкретизируется и $\widehat{\Phi_t^2}$.

Если затем еще понизить степень общности, положив $V(\eta_t, t) = 0$, то получающиеся из (8)—(11) формулы совпадут с соответствующими формулами п. 4.2.2.

Чтобы найти оценки (3)—(5), (14), нужно определить уравнения для АПВ процессов $\{x_t\}$, $\{\eta_t\}$. Эти уравнения вместе с уравнением для

ЛП дадут замкнутую систему уравнений совместного обнаружения и фильтрации.

5.2.2. Уравнения совместного обнаружения и фильтрации. Наблюдаемый процесс y_t определяется прежней формулой (1), где x_t и η_t — независимые между собой диффузионные марковские процессы с коэффициентами переноса $a_x(x, t)$, $a_\eta(\eta, t)$ и диффузии $b_x(x, t)$, $b_\eta(\eta, t)$ соответственно. При выводе общих формул для ОП (см. предыдущий пункт) эти коэффициенты непосредственно не потребовались; здесь же они понадобятся.

Переход к непрерывному времени в рекуррентных алгоритмах оптимальной нелинейной фильтрации (5.1.9) и (5.1.10) осуществляется аналогично п. 4.2.3. В результате этого перехода получим симметризованные интегро-дифференциальные уравнения типа (4.2.27):

$$\dot{w}_{1t}(x, \eta) = (L_1 - \overline{L}_1(w_{1t}))\, w_{1t}(x, \eta), \tag{5.2.15}$$

$$\dot{w}_{0t}(\eta) = (L_0 - \overline{L}_0(w_{0t}))\, w_{0t}(\eta), \tag{5.2.16}$$

где

$$L_1 = -\frac{\partial}{\partial x} a_x(x, t) - \frac{\partial}{\partial \eta} a_\eta(\eta, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} b_x(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} b_\eta(\eta, t) + \frac{1}{N}\Phi(x, \eta, t)\left[y_t - \frac{1}{2}\Phi(x, \eta, t)\right], \tag{5.2.17}$$

$$L_0 = -\frac{\partial}{\partial \eta} a_\eta(\eta, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} b_\eta(\eta, t) + \frac{1}{2} V(\eta, t)\left[y_t - \frac{1}{2} V(\eta, t)\right],$$

$$\overline{L}_1(w_{1t}) = \frac{1}{N}\iint \Phi(x, \eta, t)\left[y_t - \frac{1}{2}\Phi(x, \eta, t)\right] w_{1t}(x, \eta)\, dx\, d\eta, \tag{5.2.18}$$

$$\overline{L}_0(w_{0t}) = \frac{1}{N}\int V(\eta, t)\left[y_t - \frac{1}{2} V(\eta, t)\right] w_{0t}(\eta)\, d\eta.$$

Уравнение для ЛП определяется формулой (8), которую, учитывая (18), можно записать также в виде

$$\dot{z}_t = \overline{L}_1(w_{1t}) - \overline{L}_0(w_{0t}). \tag{5.2.19}$$

Уравнения (15), (16), (19) определяют оптимальную систему совместного обнаружения и фильтрации, структурная схема которой показана на рис. 5.1. Данная система является двухканальной. Структуры блоков $ОФ_1$ и $ОФ_0$ определяются уравнениями (15), (16) соответственно. Блок $ОФ_1$ осуществляет оптимальную (при $\theta=1$) в общем случае нелинейную фильтрацию сигнала и помехи из белого шума, а блок $ОФ_0$ осуществляет оптимальную (при $\theta=0$) фильтрацию помехи из шума. Пунктиром на рис. 5.1 очерчен блок формирования ЛП, структура которого определяется соотношениями (19) и (18). Отметим, что в этом блоке имеется операция вычитания (см. (19)), в результате которой осуществляется частичная компенсация помехи.

Отметим также, что блок $ОФ_1$ может быть в свою очередь разделен на два канала: «сигнальный» и «помеховый». С выхода первого из них поступает оптимальная оценка полезного сигнала (при $\theta=1$), которую можно использовать после соответствующей команды с порогового устройства.

5.2.3. Многомерное обобщение. Если $\mathbf{x}_t$, $\boldsymbol{\eta}_t$ — параметры сигнала и помехи — являются многомерными диффузионными марковскими процессами, не зависящими между собой, то уравнения совместного обна-

ружения и фильтрации в операторной форме сохраняют прежний вид (15), (16), (19) (см. также [92]). Нужно только заменить x, η на $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\eta}$, а также одномерные операторы Фоккера — Планка, входящие в апостериорные операторы L_1 и L_0 (17), — на соответствующие многомерные. Не останавливаясь больше на этом случае, рассмотрим задачу в более общей постановке [91].

Предположим, что сигнал и помеха, в общем случае неаддитивные и статистически зависимые между собой, являются заданными функциями некоторых компонент m-мерного диффузионного марковского процесса

$$\mathbf{x}_t=(x_{1t}, \dots, x_{qt}, x_{q+1, t}, \dots, x_{lt}, x_{l+1, t}, \dots, x_{mt}), \quad q<l<m, \qquad (5.2.20)$$

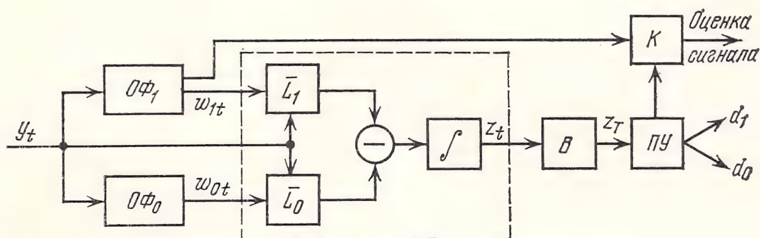


Рис. 5.1

характеризуемого коэффициентами переноса $a_i(\mathbf{x}, t)$ и диффузии $b_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $i, j=1, 2, \dots, m$. При этом пусть наблюдаемые данные имеют вид

$$y_t=\begin{cases}\Phi(\mathbf{x}_{1t}, \boldsymbol{\eta}_t, t)+\xi_t & \text{при } \theta=1,\\ V(\boldsymbol{\eta}_t, t)+\xi_t & \text{при } \theta=0,\end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (5.2.21)$$

где ξ_t — белый шум, а параметры сигнала и помехи определяются соотношениями

$$\mathbf{x}_{1t}=(x_{1t}, \dots, x_{qt}); \qquad \boldsymbol{\eta}_t=(x_{q+1, t}, \dots, x_{lt}).$$

Отметим, что компоненты $(x_{i+1,t}, \dots, x_{mt})$ исходного процесса (20) не входят в состав наблюдаемых данных ни при какой из возможных ситуаций; при $\theta=0$ в (21) не входят также и компоненты $(x_{1t}, \dots, x_{qt})$. Параметры сигнала и помехи $\mathbf{x}_{1t}$, $\boldsymbol{\eta}_t$ сами по себе не являются марковскими процессами. Однако они представляют собой компоненты марковского процесса (20).

Рассматриваемая постановка задачи охватывает случай зависимых параметров сигнала и помехи. Кроме того, эта постановка полезна и потому, что при аппроксимации немарковских процессов марковскими (см. п. 1.5.4) возникают задачи, когда сигнал (или помеха) является функцией не всех компонент марковского процесса, а лишь их части, например, одной.

Решение данной задачи можно получить, записав рекуррентные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации для проблемы типа (21) и осуществив в них переход к непрерывному времени. Эти алгоритмы являются обобщением (5.1.9) — (5.1.11). Не выписывая их, отме-

тим лишь изменения, которые следует произвести в формулах (5.1.9) — (5.1.11). Нужно заменить:

$$\Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1}) \to \Phi(\mathbf{x}_{1,\,k+1}, \boldsymbol{\eta}_{k+1}),\ V(\eta_{k+1}) \to V(\boldsymbol{\eta}_{k+1}),$$

$$\pi(x_{k+1} \mid x_k)\,\rho_\eta(\eta_{k+1}, \eta_k) \to \pi_x(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_k),\ \rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) \to \pi_x(\mathbf{x}_{k+1} \mid \mathbf{x}_k),$$

$$w_{1,\,k+1}(x_{k+1}, \eta_{k+1}) \to w_{1,\,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}),\ w_{0,\,k+1}(\eta_{k+1}) \to w_{0,\,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}),$$

где $\pi_x(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$ — переходная плотность вероятностей m-мерного марковского процесса с дискретным временем

$$\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \ldots, x_{qk}, \ldots, x_{lk}, \ldots, x_{mk}),\ \mathbf{x}_{1k} = (x_{1k}, \ldots, x_{qk}),$$

$$\boldsymbol{\eta}_k = (x_{q+1,\,k}, \ldots, x_{lk}),\ k = 1, 2, \ldots$$

$$w_{\theta,\,k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) = p(\mathbf{x}_{k+1} \mid y_1^{k+1}, \theta)\ (\theta = 0{,}1) — \text{АПВ}.$$

При этом нужно изменить в (5.1.9) — (5.1.11) кратность интегрирования в соответствии с изменением числа аргументов АПВ.

Переходя затем к непрерывному времени, получим симметризованные уравнения совместного обнаружения и фильтрации [91]:

$$\dot{w}_{\theta t}(\mathbf{x}) = (L_\theta - \overline{L}_\theta(w_{\theta t}))\, w_{\theta t}(\mathbf{x}),\ \theta = 0, 1; \tag{5.2.22}$$

$$\dot{z}_t = \overline{L}_1(w_{1t}) - \overline{L}_0(w_{0t}); \tag{5.2.23}$$

где

$$L_1 = L_{pr} + \frac{1}{N}\Phi(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\eta}, t)\left[y_t - \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\eta}, t)\right],$$

$$L_0 = L_{pr} + \frac{1}{N}V(\boldsymbol{\eta}, t)\left[y_t - \frac{1}{2}V(\boldsymbol{\eta}, t)\right]; \tag{5.2.24}$$

$$L_{pr} = -\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_j}b_{ij}(\mathbf{x}, t); \tag{5.2.25}$$

$$\overline{L}_1(w_{1t}) = \frac{1}{N}\int\left[\Phi(\mathbf{x}_1, \eta, t)\,y_t - \frac{1}{2}\Phi^2(\mathbf{x}_1, \eta, t)\right]w_{1t}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

$$\overline{L}_0(w_{0t}) = \frac{1}{N}\int\left[V(\boldsymbol{\eta}, t)\,y_t - \frac{1}{2}V^2(\boldsymbol{\eta}, t)\right]w_{0t}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{5.2.26}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m),\ \mathbf{x}_1 = (x_1, \ldots, x_q),\ \boldsymbol{\eta} = (x_{q+1}, \ldots, x_l).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае в отличие от предыдущей задачи (см. (15), (16)) число аргументов апостериорных плотностей одинаково (и равно m) при обеих ситуациях: $\theta=0$ и $\theta=1$. Кроме того, априорный оператор (25), входящий в апостериорные операторы L_θ, один и тот же при $\theta=0$ и 1 (ср. с (17)).

Уравнения совместного обнаружения и фильтрации в форме Ито являются обобщением (4.2.24), (4.2.25) и (10):

$$\dot{w}_{\theta t}(\mathbf{x}) = L_{pr}w_{\theta t}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}_\theta(w_{\theta t})\,w_{\theta t}(\mathbf{x}),\ \theta = 0, 1 \tag{5.2.27}$$

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N}(\widehat{\Phi}_t - \widehat{V}_{0t})\,y_t - \frac{1}{2N}(\widehat{\Phi}_t^2 - \widehat{V}_{0t}^2),$$

где

$$\mathscr{L}_1(w_{1t}) = \frac{1}{N}[\Phi_t(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\eta}, t) - \widehat{\Phi}_t][y_t - \widehat{\Phi}_t],$$

$$\mathscr{L}_0(w_{0t}) = \frac{1}{N}[V(\boldsymbol{\eta}, t) - \widehat{V}_t][y_t - \widehat{V}_t],$$

$$(5.2.28)$$

$$\widehat{\Phi}_t = M[\Phi(\mathbf{x}_{1t}, \boldsymbol{\eta}_t) \mid y_0^t, \theta = 1] = \int \Phi(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\eta}, t) w_{1t}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\widehat{V}_{0t} = M[V(\boldsymbol{\eta}_t) \mid y_0^t, \theta = 0] = \int V(\boldsymbol{\eta}, t) w_{0t}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

а L_{pr} определяется формулой (25).

5.3. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ АЛГОРИТМОВ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ СИНТЕЗА

5.3.1. Детерминированные сигналы. Обеляющий фильтр. Детерминированные процессы (сигналы) являются крайним вырожденным частным случаем стохастических сигналов (см. п. 1.5.5). Поэтому естественно, что синтез обнаружителей детерминированных сигналов можно осуществлять, непосредственно конкретизируя полученные выше общие результаты.

а) Остановимся, например, на алгоритме (5.1.4). Если полезный сигнал $S(t_k) = S_k$ — детерминированный, то АПВ $w_k(x_k)$ является дельтообразной, при этом указанный алгоритм приобретает простой вид

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k \frac{\rho_\eta [Q(y_{k+1}, S_{k+1}) \mid Q(y_k, S_k)] Q^*(y_{k+1}, S_{k+1})}{\rho_\eta [N(y_{k+1}) \mid N(y_k)] N^*(y_{k+1})}. \qquad (5.3.1)$$

В это рекуррентное соотношение плотность $w_k(x_k)$ уже не входит и, следовательно, соответствующий блок нелинейной оптимальной фильтрации в обнаружителе детерминированных сигналов отсутствует. Сама задача фильтрации (оценки) сигналов, полностью известных наблюдателю, отпадает.

Таким образом, в данном случае система совместного обнаружения и фильтрации является вырожденной, при этом блока оценки сигнала нет. Система (приемник) выполняет только обнаруженческие функции.

Перейдем к непрерывному времени, при этом рассмотрим случай, когда помеха аддитивна и является марковским гауссовским процессом, для которого

$$\rho_\eta(\eta_{k+1} \mid \eta_k) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi(1 - R^2)}} \exp\left\{-\frac{(\eta_{k+1} - \eta_k R)^2}{2\sigma_0^2(1 - R^2)}\right\},$$

$$R = \exp\{-\mu \mid \Delta t \mid\}, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k. \qquad (5.3.2)$$

При непрерывном времени этот процесс определяется стохастическим уравнением

$$\dot{\eta}_t = -\mu\eta_t + \zeta_{0t}, \quad M\zeta_{0t} = 0, \quad M\zeta_{0t}\zeta_{0t+\tau} = \nu\delta(\tau). \qquad (5.3.3)$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче при детерминированном сигнале переход к непрерывному времени можно осуществить и без введения белого шума (что мы вначале и сделаем). При этом все равно будем иметь регулярный случай.

Конкретизируя (1) с учетом (2), получим

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k \exp\left\{\frac{2\,(y_{k+1}-y_kR)(S_{k+1}-S_kR)-(S_{k+1}-S_kR)^2}{2\sigma_0^2\,(1-R^2)}\right\}.$$

Сделаем замену $z_k=\ln\Lambda_k$, затем поделим обе части полученного равенства на Δt, и учитывая $R=1-\mu|\Delta t|+\ldots$, перейдем к пределу ($\Delta t\to 0$). В результате будем иметь

$$\dot{z}_t=\frac{1}{2\sigma_0^2\mu}\widetilde{S}_t\widetilde{y}_t-\frac{1}{4\sigma_0^2\mu}(\widetilde{S}_t)^2, \tag{5.3.4}$$

где обозначено

$$\widetilde{y}_t=\dot{y}_t+\mu y_t, \tag{5.3.5}$$

$$\widetilde{S}_t=\dot{S}_t+\mu S_t. \tag{5.3.6}$$

Заметим, что соотношение (4) определяет также ЛП в задаче обнаружения детерминированного сигнала $\widetilde{S}_t$ (6) на фоне белого гауссовского шума со спектральной плотностью $2\sigma_0^2\mu=\nu$ (ср. с (4.2.19)).

На рис. 5.2 в соответствии с (4)—(6) представлена структурная схема оптимального обнаружителя детерминированного сигнала на фоне коррелированной помехи. Обнаружитель представляет собой коррелятор, на входе которого имеется устройство (ОБФ), преобразующее наблюдаемые данные согласно (5). В качестве опорного сигнала коррелятора используется преобразованный полезный сигнал (6).

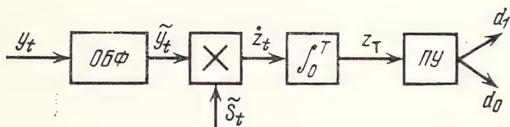


Рис. 5.2

Выясним «физический» смысл преобразователя ОБФ. Учитывая, что $y_t=\theta S_t+\eta_t$, из (3), (5) непосредственно получаем, что входное устройство обнаружителя осуществляет декорреляцию помехи, преобразуя коррелированный процесс $\{\eta_t\}$ и некоррелированный $\{\zeta_{0t}\}$ (дельта-коррелированный). Таким образом, ОБФ представляет собой «обеляющий» фильтр, приводящий «небелый» шум к белому.

б) Алгоритм оптимального обнаружения детерминированных сигналов на фоне помех при наличии белого шума также непосредственно вытекает (как частный случай) из общих предыдущих соотношений.

Так, в уравнениях п. 5.2.2 и 5.2.3 нужно положить коэффициенты переноса и диффузии, относящиеся к сигналу, равными нулю

$$a_i=b_{ij}=0,\quad i,\ j=1,\ldots,q, \tag{5.3.7}$$

при этом АПВ $w_{\theta t}(x_1,\ldots,x_q,\ x_{q+1},\ldots,x_m)\,(\theta=0,\ 1)$ следует заменить на АПВ $w_{\theta t}(x_{q+1},\ldots,x_m)$. Отметим, что в отличие от предыдущего случая (п. 5.3.1,*а*), здесь апостериорные плотности совсем не исчезают — остаются апостериорные распределения помехи, определяя ее фильтрацию из шума.

Рассмотрим пример, когда наблюдаемый процесс

$$y_t=\theta S_t+\eta_t+\xi_t,\quad \theta=0,\ 1, \tag{5.3.8}$$

где помеха η_t определяется уравнением (3). В этом случае операторы L_0 и L_1 приобретают вид

$$L_\theta=\mu\frac{\partial}{\partial\eta}\eta+\frac{\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\theta S_t+\eta}{N}\left[y_t-\frac{1}{2}(\theta S_t+\eta)\right]. \tag{5.3.9}$$

В данной задаче АПВ $w_{1t}(\eta)$ и $w_{0t}(\eta)$ являются гауссовскими, причем их можно записать так:

$$w_{\theta t}=\sqrt{\frac{h_t}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{h_t}{2}(\eta-m_{\theta t})^2\right\},\quad \theta=0,1. \tag{5.3.10}$$

Используя (9), (10), перейдем от общих уравнений (5.2.15), (5.2.16), (5.2.19) к уравнениям для достаточных статистик. В результате получим [92]

$$\dot h_t=2\mu h_t-\nu h_t^2+1/N; \tag{5.3.11}$$

$$\dot m_{\theta t}=-\left(\mu+\frac{1}{Nh_t}\right)m_{\theta t}+\frac{1}{Nh_t}(y_t-\theta S_t),\ \theta=0,1; \tag{5.3.12}$$

$$\dot z_t=\frac{S_t}{N}(y_t-m_{1t})+\frac{y_t}{N}(m_{1t}-m_{0t})-\frac{1}{2N}(m^2_{1t}-m^2_{0t})-S^2_t/2N. \tag{5.3.13}$$

Оптимальный обнаружитель, моделирующий эти уравнения, представляет собой двухканальное устройство. Блоки оптимальной фильтрации ОФ$_1$ и ОФ$_0$ (см. схему на рис. 5.1) в данном примере являются линейными, причем структура их одинакова. На вход ОФ$_1$ поступает (y_t-S_t), а на вход ОФ — y_t. Моделируются эти блоки согласно (12) при помощи усилителя и цепочки RC (с переменным или постоянным параметром в зависимости от рассматриваемого режима работы схемы). На выходе данных блоков образуются функции $m_1(t)$ и $m_0(t)$, представляющие собой выделенную из белого шума помеху (ее среднеквадратические оценки) соответственно двум ситуациям: $\theta=1$ и $\theta=0$. При формировании ЛП эти функции вычитаются друг из друга (см. (13)), что приводит к компенсации помехи.

Синтезированный обнаружитель можно реализовать и по схеме рис. 5.2. Чтобы убедиться в этом, подставим решение уравнения (12) $m_\theta(0)=0)$

$$m_{\theta t}=\frac{1}{N}\exp\left\{-\int\limits_0^t\left(\mu+\frac{1}{Nh_\tau}\right)d\tau\right\}\int\limits_0^t\frac{y_\tau-\theta S_\tau}{h_\tau}\exp\left\{\int\limits_0^\tau\left(\mu+\frac{1}{Nh_\rho}\right)d\rho\right\}d\tau$$

в уравнение (13). При этом (13) приводится к виду

$$\dot z_t=\frac{1}{N}\tilde y_t\tilde S_t-\frac{1}{2N}(\tilde S_t)^2, \tag{5.3.14}$$

где

$$\tilde S_t=S_t-\frac{1}{N}\exp\left\{-\int\limits_0^t\left(\mu+\frac{1}{Nh_\tau}\right)d\tau\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^t\frac{S_\tau}{h_\tau}\exp\left\{\int\limits_0^\tau\left(\mu+\frac{1}{Nh_\rho}\right)d\rho\right\}d\tau, \tag{5.3.15}$$

а $\tilde y_t$ определяется аналогичной формулой (S в (15) заменяется на y), или, что то же,

$$\tilde y_t=y_t-m_{0t}. \tag{5.3.16}$$

В результате пришли к схеме рис. 5.2.

Отметим, что и в данной задаче входное устройство приемника выполняет функции обеляющего фильтра. Этот вывод, по сути дела, следует уже из вида (14) и того, что $\tilde S_t$ (15) не зависит от y_t.

Но можно к такому же выводу прийти и другим способом. Для этого перепишем (16) с учетом (8):

$$\tilde{y}_t = \theta S_t + [y_{t\,(\theta=0)} - m_{0t}]. \qquad (5.3.17)$$

Так как $y_{t\,(\theta=0)} = \eta_t + \xi_t$, а $m_{0t} = M[\eta_t \mid y_0^t,\ \theta = 0]$, то используя результат п. 1.4.4, получаем, что член, стоящий в квадратных скобках (17), представляет собой белый шум. Таким образом, формируя ЛП, обнаружитель осуществляет обеление помехи.

Обнаружители, моделирующие (11)—(13) и (14)—(16), эквивалентны. Оба они формируют ЛП, и оба, в частности, производят декорреляцию помехи. Но схемные реализации этих обнаружителей несколько различны. При моделировании (1)—(13) к декорреляции помехи приводит вышеописанная двухканальная обработка, связанная с формированием соответствующих оценок помехи и их вычитанием.

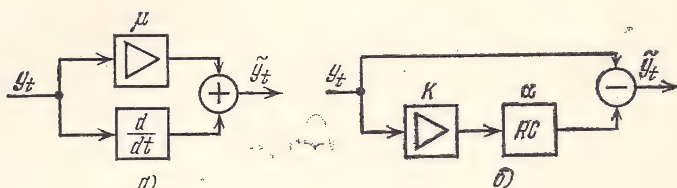


Рис. 5.3

г) Заметим, что коррелятор, имеющийся в структурной схеме рис. 5.2, может быть смоделирован, например, в виде согласованного фильтра с импульсной характеристикой $\tilde{S}(T-t)$, где T — время обнаружения (см. (4.2.20)). Согласованные фильтры для примеров, рассмотренных в п. 5.3.1,*а* и 5.3.1,*б*, различны, поскольку преобразованный сигнал $\tilde{S}(t)$ — разный (ср. (6) с (15)), хотя исходный сигнал $S(t)$ для обоих случаев один и тот же. Это явилось следствием того, что модели мешающего процесса в п. 5.3.1,*а* и 5.3.1,*б* разные: в одном случае учитывается белый шум, в другом нет. Соответственно отличаются и обеляющие фильтры; структура их определяется формулами (5) и (16) (рис. 5.3). В последнем случае ОБФ моделируются в виде усилителя

$$\left(K = \frac{1}{Nh_t\,(\mu + 1/Nh_t)}\right),$$

цепочки $RC\ (\alpha = \mu + 1/Nh_t)$ и вычитателя.

д) Отметим, что к синтезированным выше обнаружителям детерминированных сигналов на фоне коррелированных гауссовских помех можно было бы прийти (к схеме типа рис. 5.2) и другим путем — используя метод «обеляющего фильтра» (иначе метод приведения «небелого» шума к «белому»). Подобным методом задача типа (8) рассматривалась в работе [50].

Метод обеляющего фильтра был предложен для синтеза приемников Котельниковым [56]. В дальнейшем он неоднократно применялся в радиотехнических задачах [35, 137] и др. Впоследствии этот метод получил обобщение [46, 156] и назван методом «порождающего процесса». В основе метода порождающего процесса лежит минимальное представление процесса Ито (см. п. 1.4.4).

Решение задач синтеза по методу обеляющего фильтра связано с искусственным приемом [56, 35, 137] — введением в схему обработки линейного четырехполюсника с соответствующим коэффициентом передачи — обеляющего фильтра. В то же время для вышеизложенного способа синтеза такого приема не потребовалось—декорреляция помехи, обеляющий фильтр следовали непосредственно из общего метода *).

5.3.2. Гауссовский сигнал. Теперь рассмотрим пример, когда полезный сигнал является случайным процессом. Пусть наблюдаемые данные имеют вид

$$y_t = \theta x_t C_t + \eta_t + \xi_t, \tag{5.3.18}$$

где x_t — экспоненциально-коррелированный гауссовский процесс, определяемый уравнением (4.3.17); C_t — детерминированная функция времени; помеха η_t и шум ξ_t — те же, что и в предыдущем пункте (помеха и сигнал статистически независимы).

Конкретизируя (5.2.17) согласно (4.3.18), (3), (18), получаем

$$L_1 = \gamma \frac{\partial}{\partial x} x + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \eta + \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ + \frac{\nu \partial^2}{2\partial \eta^2} + \frac{xC_t + \eta}{N} \left[y_t - \frac{1}{2}(x_t C_t + \eta) \right]. \tag{5.3.19}$$

В силу гауссовских свойств сигнала и помехи и их аддитивности АПВ $w_{1t}(x, \eta)$ можно записать в виде

$$w_{1t}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{h_{11t} h_{22t} - h_{12t}^2} \exp \left\{ -\frac{h_{11t}}{2} (x - m_t)^2 - \\ - h_{12t}(x - m_t)(\eta - m_{1t}) - \frac{h_{22t}}{2} (\eta - m_{1t})^2 \right\}. \tag{5.3.20}$$

Конкретизируя уравнение (5.2.15) при помощи (19), (20), найдем

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_{11} &= 2\gamma h_{11} - \varkappa h_{11}^2 - \nu h_{12}^2 + \frac{C_t^2}{N} \\ \dot{h}_{12} &= (\gamma + \mu) h_{12} - \varkappa h_{11} h_{12} - \gamma h_{22} h_{12} + \frac{C_t}{N} \\ \dot{h}_{22} &= 2\mu h_{12} - \varkappa h_{12}^2 - \gamma h_{22}^2 + \frac{1}{N} \end{aligned} \right\}, \tag{5.3.21}$$

$$\left. \begin{aligned} h_{11}\dot{m} + h_{12}\dot{m}_1 &= -\frac{C_t}{N}(\dot{m}C_t + m_1) - \gamma h_{11} m - \mu h_{12} m_1 + \frac{C_t}{N} y_t \\ h_{12}\dot{m} + h_{22}\dot{m}_1 &= -\frac{1}{N}(mC_t + m_1) - \gamma h_{12} m - \mu h_{22} m_1 + \frac{1}{N} y_t \end{aligned} \right\}. \tag{5.3.22}$$

Оператор L_0 и АПВ $w_{0t}(\eta)$, как нетрудно убедиться, определяются прежними формулами (9), (10). Поэтому конкретизация (5.2.16) приводит к уравнениям (11), (12) (для h и m_0), которыми следует дополнить уравнение для ЛП

$$\dot{z} = \frac{y_t}{N}(mC_t + m_1 - m_0) - \frac{1}{2N}\left[(mC_t + m_1)^2 - m_0^2\right] - \\ - \frac{1}{2N}\left(\frac{h_{22}C_t^2 - 2h_{12}C_t + h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} - \frac{1}{h} \right) \Bigg], \tag{5.3.23}$$

вытекающее из (5.2.18), (5.2.19).

---

*) К обеляющим фильтрам мы еще вернемся при рассмотрении более общих задач (гл. 7).

Система уравнений (21)—(23) и (11), (13) (при $\theta=0$) представляет собой решение задачи математического синтеза оптимальной системы совместного обнаружения и фильтрации в рассматриваемом случае. Эти уравнения можно непосредственно моделировать.

В синтезированной системе блок $ОФ_0$ (см. схему рис. 5.1) совпадает с аналогичным блоком предыдущей задачи (п. 5.3.1,*б*). Его схема проще схемы блока $ОФ_1$, которая здесь определяется уравнениями (22) вместе с (21). Блок $ОФ_1$ осуществляет оптимальное оценивание не только помехи, но и сигнала (в отличие от предыдущего случая, где оценка сигнала не имела места, поскольку он был полностью известным). Оба блока являются линейными. Моделируются они при помощи усилителей, интеграторов и сумматоров. В нестационарном режиме коэффициенты усиления усилителей являются переменными и определяются детерминированными функциями (21). Вместо усилителей с переменными коэффициентами усиления можно было бы использовать, например, блоки умножения. С практической точки зрения, целесообразно моделировать схему применительно к стационарному режиму, когда $\dot{h}_{11}=\dot{h}_{12}=\dot{h}_{22}=0$, при этом коэффициенты усиления обращаются в константы.

Схема блока ЛП определяется уравнением (23). Как обычно, в нем наряду с линейными имеются и нелинейные операции. Функции $m_1(t)$ и $m_0(t)$ — оптимально отфильтрованная помеха (при $\theta=1$ и $\theta=0$) — здесь компенсируют друг друга.

Оценки $m_1(t)$ и $m_0(t)$ сами по себе интереса не представляют (они служат целям подавления помехи). В то же время оценка $m(t)$ нужна сама по себе, так как она определяет оптимальную (в среднеквадратическом смысле) оценку полезного сигнала (при $\theta=1$). Функция $C(t)m(t)$ используется как оценка сигнала $C_t x_t$ после соответствующей команды с порогового устройства, в котором z_T сравнивается с порогом. Таким образом, синтезированная система осуществляет оптимальное совместное обнаружение и оценивание сигнала (случайного процесса) при наличии коррелированной помехи и белого шума.

5.3.3. Квазидетерминированные сигналы и помехи. Квазидетерминированные процессы, занимая промежуточное положение между детерминированными и случайными процессами, могут служить математическими моделями как для сигналов, так и для помех.

Как уже отмечалось, квазидетерминированные сигналы являются вырожденным частным случаем сигналов, параметры которых представляют собой марковские процессы. Поэтому оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации квазидетерминированных сигналов на фоне коррелированных помех непосредственно вытекают из алгоритмов § 5.1, 5.2. Так, в задачах с дискретным временем нужно придать переходной плотности дельтообразный вид $\pi(x_{k+1}|x_k)=\delta(x_{k+1}-x_k)$, в результате чего алгоритмы п. 5.1.1, 5.1.2 упрощаются. Если параметр сигнала является дискретной случайной величиной, то нужно воспользоваться алгоритмами п. 5.1.3, положив в них

$$\pi_{\beta\alpha}=\begin{cases}1, & \text{при } \beta=\alpha,\\ 0, & \text{при } \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

В случае непрерывного времени следует использовать уравнения § 5.2, приравняв нулю коэффициенты переноса и диффузии, относящиеся к сигналу.

Подчеркнем отличие от случая детерминированных сигналов (п. 5.3.1). Там тоже производятся аналогичные упрощающие операции (например (7)), но там к тому же и апостериорная плотность параметров сигнала вырождается, сразу становясь дельтообразной. Поэтому в п. 5.3.1 «сигнальные» аргументы апостериорной плотности отсутствуют. Здесь же этого нет. Число аргументов АПВ здесь остается прежним (таким же, как и при параметрах, являющихся случайными процессами).

В ряде радиотехнических задач и помеха может быть квазидетерминированным процессом. Например, в радиолокации отражения от местных предметов, работа соседних станций иногда создает помехи такого типа. Очевидно, что оптимальные алгоритмы обнаружения и фильтрации сигналов (детерминированных, квазидетерминированных,

случайных процессов) на фоне квазидетерминированных помех (и при наличии белого шума) непосредственно следуют из алгоритмов § 5.1, 5.2. Для этого нужно проделать упрощающие операции, аналогичные случаю квазидетерминированного сигнала, т. е. положить $\rho_\eta(\eta_{k+1}|\eta_k)=\delta(\eta_{k+1}-\eta_k)$, приравнять нулю соответствующие коэффициенты a_i, b_{ij} и т. д.

Отметим еще следующее. Если найдены удобные для моделирования алгоритмы, определяющие достаточные статистики в задачах обнаружения и фильтрации марковских процессов, то синтез систем при квазидетерминированных процессах (сигналах или помехах) осуществляется «автоматически». Пусть, например, радиосигнал $S(A,t)=A\sin[\omega_0 t+\varphi(t)]$ со случайной амплитудой A, которую считаем гауссовской величиной (частота ω_0 и фазовая модуляция $\varphi(t)$ предполагаются известными), наблюдается (быть может) на фоне экспоненциально-коррелированной гауссовской помехи при наличии белого шума. Тогда оптимальный алгоритм совместного обнаружения и оценки амплитуды радиосигнала сразу получаем из результатов п. 5.3.2. Для этого в (21)—(23) нужно положить (ср. с п. 4.3.6).

$$\gamma=\varkappa=0,\quad C_t=\sin[\omega_0 t+\varphi(t)].$$

5.4. МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОЕ СОВМЕСТНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ

Вышеизложенные методы синтеза оптимальных систем совместного обнаружения и фильтрации относились к двухальтернативным задачам, когда область Γ изменения наблюдаемого процесса $\{y_t\}$ распадалась на две подобласти, соответствующие двум ситуациям: $\theta=1$ и $\theta=0$ (есть сигнал; нет сигнала).

В более общей постановке область Γ состоит не из двух, а из большего числа подобластей, что связано, например, с возможностью приема нескольких сигналов, принадлежащих различным классам. При этом возникает задача многоальтернативного обнаружения (см. п. 2.2.8).

Обычная задача многоальтернативного обнаружения состоит в выяснении, содержит ли наблюдаемый процесс полезный сигнал и если содержит, то какой (или какие) из возможных. Но наряду с этим часто требуется получать большую информацию, связанную с оценкой сигнала (или его параметров). Оценку можно осуществлять одновременно с обнаружением в рамках метода многоальтернативного совместного обнаружения и фильтрации марковских сигналов [95].

5.4.1. Общие алгоритмы. Остановимся на случае непрерывного времени *). Предположим, что наблюдаемые данные определяются соотношением

$$y_t=\begin{cases}\Phi_j(x_{1t},\ x_{2t},\dots,x_{jt},\ \eta_t,\ t)+\xi_t, & \text{при } \theta=j,\ j=1,2,\dots,m,\\ \Phi_0(\eta_t,\ t)+\xi_t, & \text{при } \theta=0,\end{cases}\tag{5.4.1}$$

где Φ_j ($j=0, 1, \dots, m$) — известные функции; x_{jt} — параметр j-го сигнала; η_t — параметр помехи; ξ_t — белый шум. При аддитивных сигналах и помехах функции Φ_j могут иметь, например, вид

$$\Phi_j(x_{1t},\dots,x_{jt},\ \eta_t,\ t)=\sum_{i=1}^{j}S_i(x_{it},\ t)+\Phi_0(\eta_t,\ t),\quad j=1,\dots,m,$$

*) В [95] рассмотрен также и случай дискретного времени.

где $S_i(x_{it}, t)$ $(i=1, \ldots, m)$ — набор возможных сигналов. Но может быть и другая постановка задачи, когда в каждом из состояний $\theta=j$ процесса y_t присутствует сигнал лишь одного класса, т. е.

$$\Phi_j=S_j(x_{jt}, t)+\Phi_0(\eta_t, t), \quad j=1, \ldots, m. \tag{5.4.2}$$

Все эти задачи охватываются постановкой (1).

Рассмотрим общий случай, при котором параметры сигналов статистически зависимы между собой и статистически зависят от параметров помехи. Будем предполагать, что эти параметры образуют в совокупности $(m+1)$-мерный диффузионный марковский процесс $\mathbf{x}_t=(x_{0t}, x_{1t}, \ldots, x_{mt})$, определяемый коэффициентами переноса $a_i(\mathbf{x}, t)$ и диффузии $b_{ij}(\mathbf{x}, t)$, i, $j=0, \ldots, m$. (Для упрощения записи введено обозначение: $\eta_t\equiv x_{0t}$.) Априорные вероятности состояний $p_j=P(\theta=j)$, $j=0, \ldots$ $\ldots, m$ предполагаются известными.

Так как мы рассматриваем байесовскую постановку задачи, то алгоритмы многоальтернативного обнаружения определяются решающими правилами п. 2.2.8. Согласно этим правилам алгоритмы обнаружения строятся на основе ОП

$$\Lambda_{jt}=\frac{p(y_0{}^t \mid \theta=j)}{r(y_0{}^t \mid \theta=0)}, \quad j=1, \ldots, m,$$

или их логарифмов $z_{jt}=\ln \Lambda_{jt}$.

Поскольку, кроме выяснения того, какое из возможных состояний θ имеет место, необходимо оценивать параметры сигналов, то раскрытие указанных правил многоальтернативного обнаружения проведем при помощи метода совместного обнаружения и фильтрации. Для этого каждый из ЛП z_{jt} раскроем с использованием уравнений п. 5.2.3 (общая постановка задачи п. 5.2.3 позволяет это сделать). В результате вместо трех уравнений (5.2.22), (5.2.23) будем иметь систему из $(2m+$ $+1)$-го симметризованного уравнения для АПВ $w_{jt}(\mathbf{x})=p(\mathbf{x}|y_0{}^t, \theta=j)$ и для ЛП z_{jt}

$$\dot{w}_{jt}(\mathbf{x})=(L_j-\overline{L}_j(w_{jt}))\, w_{jt}(\mathbf{x}), \quad j=0, 1, \ldots, m; \tag{5.4.3}$$

$$\dot{z}_{jt}=\overline{L}_j(w_{jt})-\overline{L}_0(w_{0t}), \quad j=1, \ldots, m; \tag{5.4.4}$$

$$L_j=L_{pr}+\frac{1}{N}\Phi_j(x_1, \ldots, x_j, x_0, t)\left[y_t-\frac{1}{2}\Phi_j(x_1, \ldots, x_j, x_0, t)\right],$$

$$\overline{L}_j(w_{jt})=\frac{1}{N}\int\cdots\int \Phi_j(x_1, \ldots, x_j, x_0, t)\,\Big[y_t-$$

$$-\frac{1}{2}\Phi_j(x_1, \ldots, x_j, x_0, t)\Big]\, w_{jt}(x_0, x_1, \ldots, x_m)\, dx_0 dx_1 \ldots dx_m,$$

$$j=0, 1, \ldots, m, \tag{5.4.5}$$

$$L_{pr}=-\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(\mathbf{x}, t)+\frac{1}{2}\sum_{i, j=0}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}b_{ij}(\mathbf{x}, t).$$

Используя (5.2.27), (5.2.28), можно записать для рассматриваемой здесь задачи соответствующую систему стохастических уравнений в форме Ито.

Уравнения (3)—(5) вместе с алгоритмами п. 2.2.8 и определяют синтез оптимальной системы многоальтернативного совместного обнаружения и фильтрации сигналов на фоне помех. Ее структурная схема представлена на рис. 5.4.

Данная система является многоканальной. Блок ОФ$_j$ ($j=1, \ldots, m$), структура которого определяется уравнениями (3), (5) осуществляет оптимальную (при $\theta=j$) фильтрацию сигналов и помехи из шума. В том частном случае, когда помеха не рассматривается, блок ОФ$_j$ упрощается. При этом нижний канал системы (ОФ$_0$, $\bar{L}_0$), служащий для оптимального (при $\theta=0$) выделения помехи и ее последующей компенсации, отсутствует.

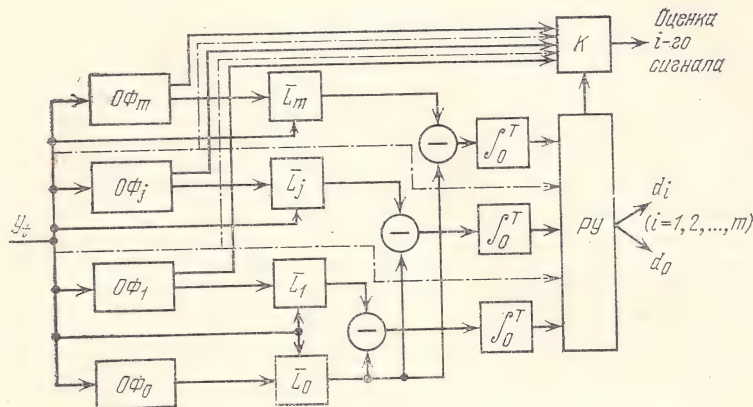


Рис. 5.4

В решающем устройстве (РУ) статистики $z_{1T}, \ldots, z_{mT}$ обрабатываются в соответствии с принятым решающим правилом, например (2.2.31), которое для ЛП имеет вид

$$\delta^*(y_0^T)=d_j,$$

если

$$\ln p_j+z_{jT}\geqslant \ln p_i+z_{iT}, \quad i=0,\ 1, \ldots, m,\ i\neq j$$

(d_j — решение о том, что имеет место состояние $\theta=j$, $j=0, \ldots, m$). При одинаковых априорных вероятностях $p_j=p$ ($j=1, \ldots, m$) это правило сводится к выбору максимального ЛП. Если

$$z_{jT}\geqslant z_{iT}, \quad i=1, \ldots, m, \quad i\neq j, \tag{5.4.6}$$

и, кроме того,

$$z_{jT}\geqslant \ln\frac{p_0}{p}, \quad j=1, \ldots, m, \tag{5.4.7}$$

то выносится решение d_j ($j\neq 0$). После этого с выхода ключевого блока К поступает оценка j-го сигнала (при $\theta=j$). Последняя представляет собой псевдооценку, если решение d_j оказалось ошибочным. При

$$z_{jT}\leqslant \ln\frac{p_0}{p}, \quad j=1, \ldots, m, \tag{5.4.8}$$

принимается решение d_0 (нет сигнала).

Таким образом, рассматриваемая система осуществляет оптимальное многоальтернативное обнаружение сигналов, при этом в течение всего процесса приема в одном из каналов формируются оценки сигналов (если $\theta\neq 0$), которые используются после решения об обнаружении.

5.4.2. Примеры. Полученные выше общие алгоритмы могут быть использованы для синтеза оптимальных систем в конкретных многоальтернативных задачах при детерминированных, квазидетерминированных, стохастических сигналах и помехах аналогично тому, как это делалось в бинарных задачах (§ 4.3, 5.3). Здесь мы рассмотрим лишь два примера, относящиеся к задаче различения сигналов. Последняя является частным случаем задачи многоальтернативного обнаружения.

а) Синтезируем оптимальную систему обнаружения и различения детерминированных сигналов при наличии экспоненциально-коррелированной гауссовской помехи и белого шума. Постановка задачи относится к частному случаю (2), когда

$$\Phi_j = S_j(t) + \eta_t, \quad j=1, \ldots, m,$$

где $S_j(t)$, $j=1, \ldots, m$ — набор детерминированных сигналов произвольной (но известной) формы; η_t — помеха, определяемая уравнением (5.3.3).

АПВ w_{jt}, $j=0, 1, \ldots, m$, в данном примере записываются в виде (5.3.10), при этом конкретизация (3)—(5) дает

$$\dot{m}_{jt} = -\left(\mu + \frac{1}{Nh_t}\right) m_{jt} + \frac{1}{Nh_t}(y_t - S_{jt}), \; j=1, \ldots, m,$$

$$\dot{z}_{jt} = \frac{S_{jt}}{N}(y_t - m_{jt}) + \frac{y_t}{N}(m_{jt} - m_{0t}) - \frac{1}{2N}(m_{jt}^2 - m_{0t}^2) - \frac{S_{jt}^2}{2N}, \qquad (5.4.9)$$

уравнения для h_{0t} и m_{0t} совпадают с (5.3.11), (5.3.12).

Полученные уравнения, определяющие структурную схему оптимальной системы обнаружения и различения сигналов, представляют собой обобщение уравнений (5.3.11)—(5.3.13) в двухальтернативной задаче. Моделировать (9) можно непосредственно, при этом придем к реализации устройства по способу фильтрации помехи и ее компенсации (см. общую схему на рис. 5.4). Заметим, что в данном случае операция оценки сигналов отсутствует, поскольку они полностью известны.

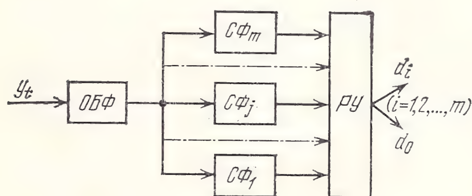


Рис. 5.5

Учитывая, что уравнение для ЛП z_{jt} (9) приводится для всех $j=1, 2, \ldots, m$ к виду (5.3.14), где $\tilde{S}_t$ заменяется на $\tilde{S}_{jt}$, а $\tilde{y}_t$ определяется прежней формулой (5.3.16), структурную схему рассматриваемой системы можно представить также в виде рис. 5.5. Данная система состоит из набора фильтров СФ$_j$ ($j=1, \ldots, m$), согласованных с сигналами $\tilde{S}_{jt}$. Последние определяются формулой (5.3.15), в которой S_t заменяется на S_{jt}. Импульсные характеристики указанных фильтров равны $\tilde{S}_j(T-t)$. На входе многоканальной системы согласованных фильтров имеется обеляющий фильтр ОБФ, определяемый (5.3.16) (схема его на рис. 3.3,*б*). В рассматриваемой задаче обеляющий фильтр является общим для всех каналов. Сигналы с выхода согласованных фильтров обрабатываются в решающем устройстве по какому-либо из указанных выше алгоритмов, например (6)—(8).

В частном случае, когда коррелированная помеха не рассматривается, обеляющий фильтр отсутствует. Если к тому же исключить ситуацию $\theta=0$ и положить $m=2$, то синтезированная система совпадает с известным приемником различения двух детерминированных сигналов в белом шуме (см., например, [131]).

б) Теперь рассмотрим пример синтеза оптимальной системы обнаружения, различения и оценивания стохастических сигналов. Для простоты коррелированную помеху исключим из рассмотрения. Пусть соотношение (2) имеет вид

$$\Phi_j = S_j(x_{jt}, t) = x_{jt} C_{1j}(t) + C_{2j}(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.4.10}$$

где $C_{1j}(t)$, $C_{2j}(t)$ — детерминированные функции времени, а $\{x_{jt}\}$ — марковские гауссовские процессы, независимые между собой и определяемые уравнениями

$$\dot{x}_{jt} = -\gamma_j x_{jt} + \zeta_{jt}, \quad \mathrm{M}\zeta_{jt} = 0, \quad \mathrm{M}\zeta_{jt}\zeta_{j t+\tau} = \varkappa_j \delta(\tau) \text{ при } j = 1, \ldots, m;$$
$$\mathrm{M}\zeta_{jt}\zeta_{i,\, t+\tau} = 0 \qquad \text{при } j \neq i.$$

Сигналы $S_j(x_{jt}, t)$ отличаются видом функций $C_{1j}(t)$, $C_{2j}(t)$ и, кроме того, временами корреляции $1/\gamma_i$ и дисперсиями $\sigma^2{}_j = \varkappa_j/2\gamma_j$ своих параметров.

Апостериорные плотности в данном примере имеют вид

$$w_{jt} = \sqrt{\frac{h_{jt}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} h_{jt} (x_j - m_{jt})^2\right\}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

при этом конкретизация (3) — (5) приводит к уравнениям

$$\dot{h}_{jt} = -2\gamma_j \sigma_j{}^2 h_{jt}^2 + 2\gamma_j h_{jt} + \frac{C_{1jt}^2}{N}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.4.11}$$

$$\dot{m}_t = -\left(\gamma_j + \frac{C^2{}_{1jt}}{N h_{jt}}\right) m_{jt} + \frac{C_{1jt}}{N h_{jt}} (y_t - C_{2jt}),$$

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N}(m_{jt} C_{1jt} + C_{2jt}) y_t - \frac{1}{2N} m_{jt}^2 C_{1jt}^2 -$$
$$-\frac{1}{N} m_{jt} C_{1jt} C_{2jt} - \frac{1}{2N}\left(\frac{C_{1jt}^2}{h_{jt}} + C_{2jt}^2\right), \tag{5.4.12}$$

обобщающим (4.3.25).

Система, моделирующая (11), (12), состоит из m каналов, различающихся параметрами усилителей и цепочек RC в блоках оптимальной фильтрации (см. (11)), а также видом функций C_{1jt}, C_{2jt}, используемых, в частности, в блоках ЛП (12). Решающее устройство обрабатывает ЛП z_{jT}, $j = 1, \ldots, m$, согласно вышеприведенным алгоритмам, выбирая, например, статистику с максимальным значением. Если выполняются условия (6), (7), то выносится решение d_j о том, что в y_t присутствует сигнал $S_j(x_{jt}, t)$. При этом с выхода блока К (см. общую схему на рис. 5.4) поступает оптимальная (байесовская среднеквадратическая) оценка указанного сигнала $\widehat{S}_{jt} = m_{jt} C_{1jt} + C_{2jt}$ и оптимальная оценка его параметра $\hat{x}_{jt} = m_{jt}$. Нетрудно конкретизировать (11), (12) для случая, когда сигналы (10) равны

$$S_j(x_{jt}, t) = (A_j + x_{jt}) \cos(\omega_j t + \varphi_j),$$

где A_j, ω_j, φ_j — известные параметры (нужно положить $C_{1j}(t) = \cos(\omega_j t + \varphi_j)$; $C_{2j}(t) = A_j \cos \omega_j (\omega_j + \varphi_j)$. В результате получим оптимальный алгоритм совместного обнаружения, различения и оценивания амплитудно-модулированных сигналов в белом шуме.

Глава 6

СИНТЕЗ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Как уже отмечалось, общие оптимальные алгоритмы обнаружения и фильтрации (гл. 4, 5) можно непосредственно моделировать (без особых технических трудностей) лишь при дискретных параметрах сигнала. При непрерывных значениях параметров моделирование общих алгоритмов затруднительно. В этих случаях мы прибегали к конкретизации алгоритмов, переходя к уравнениям для достаточных статистик. Однако конечное число достаточных статистик в задачах с непрерывными параметрами удается найти, как правило, лишь при детерминированных или гауссовских сигналах и помехах.

При непрерывном фазовом пространстве и негауссовских свойствах сигналов и помех синтез технически реализуемых устройств обнаружения и фильтрации приходится осуществлять с помощью приближенных методов, разработке и применению которых посвящена настоящая глава.

Использование при синтезе систем приближенных методов неизбежно приводит к некоторым потерям оптимальности (потерям качества обработки). Следует подчеркнуть, что отход от оптимальности — вынужденная мера; она является платой за упрощение технической реализации схем. Ниже излагаются методы квазиоптимального синтеза, при которых указанные потери в ряде случаев незначительны и которые при определенных условиях приводят к асимптотически оптимальным алгоритмам.

6.1. МЕТОДЫ СИНТЕЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ АПОСТЕРИОРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Сущность рассматриваемых здесь методов сводится к отысканию с помощью общего интегро-дифференциального уравнения нелинейной фильтрации системы дифференциальных уравнений для некоторых параметров, характеризующих АПВ фильтруемого процесса. При этом находятся уравнения для оценки процесса и ЛП, в которые входят указанные параметры. Система параметров, характеризующих АПВ, может быть различной. Ниже в качестве таких параметров используются условные центральные моменты.

6.1.1. Система уравнений для оценки, условных центральных моментов и ЛП. Усечение системы. Рассмотрим случай, когда наблюдаемый процесс определяется соотношением (4.2.1). Симметризованные уравнения оптимального совместного обнаружения и фильтрации, соответствующие этому случаю, даются формулами (4.2.27) — (4.2.30). Прежде чем переходить к квазиоптимальному решению, получим уравнение для оптимальной оценки (БСО)

$$\hat{x}_t \equiv m_t = \mathrm{M}[x_t \mid y_0^t,\ \theta = 1] = \int_{-\infty}^{\infty} x w_t(x)\, dx \qquad (6.1.1)$$

непрерывного параметра x_t сигнала $S(x_t, t)$. Из (1) следует, что

$$\dot{m}_t = \int_{-\infty}^{\infty} x \dot{w}_t(x)\, dx.$$

Подставим в это соотношение вместо $\dot{w}_t(x)$ правую часть уравнения (4.2.27) с учетом (4.2.29), (4.2.30) и затем проинтегрируем по частям. В результате получим симметризованное стохастическое уравнение

$$\dot{m}_t = \int \left\{ a(x, t) + \frac{1}{N}(x - m_t) \left[S(x, t)\, y_t - \frac{1}{2} S^2(x, t) \right] \right\} w_t(x)\, dx. \quad (6.1.2)$$

В это уравнение, определяющее БСО m_t, а также в уравнение для ЛП (см. (4.2.28), (4.2.30))

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} \int \left[S(x, t)\, y_t - \frac{1}{2} S^2(x, t) \right] w_t(x)\, dx \quad (6.1.3)$$

входит АПВ $w_t(x)$, описываемая уравнением (4.2.27).

Разложим функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $S(x, t)$, $S^2(x, t)$ в ряды Тейлора в окрестности m_t, предполагая при этом, что радиусы сходимости рядов охватывают область изменения параметра сигнала:

$$a(x, t) = a(m_t, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x - m_t)^i}{i!} \frac{\partial^i a(m_t, t)}{\partial x^i}, \quad (6.1.4)$$

$$b(x, t) = b(m_t, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x - m_t)^i}{i!} \frac{\partial^i b(m_t, t)}{\partial x^i}, \quad (6.1.5)$$

$$S(x, t) = S(m_t, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x - m_t)^i}{i!} \frac{\partial^i S(m_t, t)}{\partial x^i},$$

$$(6.1.6)$$

$$S^2(x, t) = S^2(m_t, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x - m_t)^i}{i!} \frac{\partial^i S^2(m_t, t)}{\partial x^i}.$$

Подставляя (4) и (6) в (2), (3), получим

$$\dot{m}_t = a(m_t, t) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{it}}{i!} \frac{\partial^i a(m_t, t)}{\partial x^i} +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \left[y_t \frac{\partial^i S(m_t, t)}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^i S^2(m_t, t)}{\partial x^i} \right] \frac{\mu_{i+1,\, t}}{i!}; \quad (6.1.7)$$

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} \left[S(m_t, t)\, y_t - \frac{1}{2} S^2(m_t, t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_{i,\, t}}{i!} \left[y_t \frac{\partial^i S(m_t, t)}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^i S^2(m_t, t)}{\partial x^i} \right], \quad (6.1.8)$$

где коэффициенты $\mu_{i,t}$ представляют собой условные центральные моменты, характеризующие АПВ $w_t(x)$:

$$\mu_{it} = M\left[(x_t - m_t)^i \mid y_0^t, \ \theta = 1 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_t)^i w_t(x)\, dx, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$(6.1.9)$$

При записи (7), (8) учтено, что $\mu_{0t} = 1$, $\mu_{1t} = 0$.

Теперь, очевидно, нужно найти уравнения, которые позволяли бы определять моменты μ_{it}. Из (9) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_{jt}=\int\left[\frac{\partial}{\partial t}(x-m_t)^j\right]w_t(x)\,dx+\int(x-m_t)^j\frac{\partial}{\partial t}w_t(x)\,dx\equiv I_1+I_2. \tag{6.1.10}$$

Первый интеграл в (10) равен

$$I_1=-j\mu_{j-1,\,t}\dot{m}_t. \tag{6.1.11}$$

Второй интеграл, используя (4.2.27), (4.2.29), (4.2.30) и интегрируя по частям, можно представить в виде

$$I_2=\int\Big\{j(x-m_t)^{j-1}a(x,\ t)+\frac{1}{2}j(j-1)(x-m_t)^{j-2}b(x,\ t)+$$
$$+\frac{1}{N}[(x-m_t)^j-\mu_{jt}]\left[S(x,\ t)\,y_t-\frac{1}{2}S^2(x,\ t)\right]\Big\}w_t(x)\,dx.$$

Подставим в это выражение (4)—(6) и затем сложим с (11), учитывая (7). В результате получим

$$\dot{\mu}_{jt}=-j\mu_{j-1,\,t}\Big\{a(m_t,\ t)+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\mu_{it}}{i!}\frac{\partial^i a(m_t,\ t)}{\partial x^i}+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\infty}\left[y_t\frac{\partial^i S(m_t,\ t)}{\partial x^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial^i S^2(m_t,\ t)}{\partial x^i}\right]\frac{\mu_{i+1,\,t}}{i!}\Big\}+$$
$$+j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu_{j+i-1,\,t}}{i!}\frac{\partial^i a(m_t,\ t)}{\partial x^i}+\frac{1}{2}j(j-1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu_{j+i-2,\,t}}{i!}\frac{\partial^i b(m_t,\ t)}{\partial x^i}+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\infty}\left[y_t\frac{\partial^i S(m_t,\ t)}{\partial x^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial^i S^2(m_t,\ t)}{\partial x^i}\right]\frac{(\mu_{j+i,\,t}-\mu_{jt}\mu_{it})}{i!},\quad j=2,\ 3,\ldots \tag{6.1.12}$$

Итак, найдена система симметризованных стохастических дифференциальных уравнений (7), (8), (12), определяющая оптимальную оценку m_t параметра сигнала, условные центральные моменты μ_{it} (9) и ЛП, зависящий от y_t, m_t, μ_{it}. Формально эта система дает оптимальное решение задачи синтеза обнаружения сигнала $S(x_t,\ t)$ (x_t — марковский диффузионный процесс) и оценивания его параметра при наличии белого шума. Однако при практическом ее моделировании придется ограничиться конечным числом уравнений, т. е. конечным числом n центральных моментов (9), пренебрегая моментами более высокого порядка ($i>n$).

В результате указанного ограничения суммы в (7), (9), (12) становятся конечными, при этом получается «усеченная» система уравнений, которая, вообще говоря, уже не дает оптимального решения задачи синтеза. Однако в ряде случаев условные центральные моменты высших порядков малосущественны; в этих случаях усеченная система даст алгоритмы, близкие к оптимальным. Так будет, например, при достаточно малом уровне шума (достаточно большом отношении сигнал/шум). Убедимся в этом.

Обозначим через x'_t то значение, которое принимает процесс $\{x_t\}$ в результате наблюдения смеси сигнала и шума $\{y_t\}$ в момент времени t. В пределе, когда шума нет, АПВ $w_t(x)=p(x_t|y_0{}^t, \theta=1)$ принимает дельта-образный вид, поскольку в этом случае $y_t=S(x'_t, t)$. При этом с уменьшением интенсивности шума

$$N\longrightarrow 0 \tag{6.1.13}$$

имеем

$$w_t(x)\longrightarrow\delta(x-x'_t). \tag{6.1.14}$$

Отметим, что для выполнения (14), кроме условия (13), необходимо потребовать, чтобы функция S (форма сигнала) имела однозначную обратную функцию в рассматриваемой области изменения параметра сигнала.

Из (1), (14) следует, что при указанных условиях

$$m_t\longrightarrow x'_t. \tag{6.1.15}$$

В результате при выполнении (14) из (9), (15) вытекает сходимость к нулю условных центральных моментов

$$\mu_{it}\longrightarrow 0, \tag{6.1.16}$$

причем тем более быстрая, чем выше порядок i моментов. В последнем можно убедиться, если воспользоваться допредельным выражением для $\delta(x)$, например, в виде гауссовской функции.

Этот результат и обусловливает возможность пренебрежения условными центральными моментами высших порядков, причем из него следует асимптотическая оптимальность алгоритма совместного обнаружения и оценивания, даваемого усеченной системой (7), (8), (12). Асимптотическая оптимальность (понимается в смысле асимптотической эквивалентности — сходимости усеченных и неусеченных алгоритмов) имеет место при условии большой апостериорной точности (14), которое выполняется, например, при выполнении (13) — при большом отношении сигнал/шум ($q\longrightarrow\infty$).

Отметим, что условие большой апостериорной точности (14) может выполняться и при любом отношении сигнал/шум, в частности, при малом, если только потребовать, чтобы случайный параметр сходился к детерминированной функции

$$x_t\longrightarrow x'_t \tag{6.1.17}$$

во всех точках t некоторого отрезка наблюдения $[t_1, t_2]\ni t$. Функция x'_t должна быть известна наблюдателю; она может быть, например, равна: $x'_t=\mathbf{M}x_t$. Условие (17) имеет место при малых априорных флюктуациях параметра, в пределе исчезающих совсем. Оно является условием высокой «априорной точности». (Соотношение (17) выполняется, например, когда коэффициент диффузии $b(x, t)\longrightarrow 0$, а начальное значение x_0 — детерминированная величина.)

В некоторых частных случаях система (7), (8), (12) и при конечном числе уравнений приводит к оптимальному решению. Так будет, например, при

$$a(x, t)=-\gamma x, \quad b(x, t)=\varkappa, \quad S(x, t)=x. \tag{6.1.18}$$

В этом случае ряды (4)—(6) ограничены, поскольку соответствующие производные функций (18) равны нулю. Конкретизируем (7), (8),

(12) применительно к (18) и учтем, что в данном случае АПВ является гауссовской, поэтому справедливы соотношения

$$\mu_{3t}=0, \quad \mu_{4t}=3\mu_{2t}^2. \qquad (6.1.19)$$

В результате получаем систему, состоящую из трех уравнений,

$$\begin{aligned}
\dot{m}_t &= -\left(\gamma+\frac{\mu_{2t}}{N}\right)m_t+\frac{\mu_{2t}}{N}\,y_t,\\
\dot{z}_t &= \frac{1}{N}\,m_t y_t-\frac{1}{2N}\,m_t^2-\frac{1}{2N}\,\mu_{2t}, \qquad (6.1.20)\\
\dot{\mu}_{2t} &= -\frac{1}{N}\,\mu_{2t}^2-2\gamma\mu_{2t}+\varkappa,
\end{aligned}$$

которая совпадает с найденной ранее — (4.3.13), (4.3.15), (4.3.12), если учесть замену $\mu_{2t}=1/h_t$, а также соотношение (4.3.20). Таким образом, в данном случае система (7), (8), (12) привела к оптимальному алгоритму (20).

6.1.2. Гауссовское приближение. Введенные в предыдущем пункте условные центральные моменты (9) играли роль статистик $\mathbf{w}_t$, заменяющих АПВ $w_t(x)$. Можно было бы в качестве $\mathbf{w}_t$ использовать и другие параметры, например, условные начальные моменты, условные семиинварианты, параметры разложения плотности $w_t(x)$ в ряд по какой-либо системе базисных функций, в частности, условные квазимоменты и т. д. В любом из этих случаев конкретизация уравнений оптимального совместного обнаружения и фильтрации приводит к системам, состоящим из, вообще говоря, бесконечного числа дифференциальных уравнений. Поэтому нужно проводить усечение систем.

Удобно аппроксимировать АПВ $w_t(x)$ распределениями, принадлежащими экспоненциальному семейству и, в частности, гауссовским распределением. Получающиеся при этом алгоритмы называются алгоритмами гауссовского приближения.

Алгоритмы гауссовского приближения в задаче фильтрации впервые получены в [118, 10]. Там же выявлена их асимптотическая оптимальность, имеющая место при условии большой апостериорной точности. Это условие выполняется для целого ряда практических задач, когда допускаются лишь малые погрешности в работе устройств. Алгоритмы гауссовского приближения в задаче совместного обнаружения и фильтрации найдены в [88, 127] (для частных примеров). Общие квазиоптимальные (или оптимальные в гауссовском приближении) алгоритмы совместного обнаружения и фильтрации получены в [91, 93].

При решении одномерной задачи в гауссовском приближении полагаем (приближенно)

$$w_t(x)=\sqrt{\frac{h_t}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{h_t}{2}(x-m_t)^2\right\}. \qquad (6.1.21)$$

Получим уравнения для параметров h_t, m_t и для ЛП, используя уравнения оптимального совместного обнаружения и фильтрации (4.2.27) — (4.2.30). Для этого подставим в них (21), причем функции $S(x,\ t)$, $a(x,\ t)$, $b(x,\ t)$ разложим в ряды Тейлора в окрестности m_t. В соответствии с гауссовским приближением в разложении $S(x,\ t)$ ограничимся членами, степень которых не выше $(x-m_t)^2$, в случае $a(x,\ t)$ — не выше $(x-m_t)$, а в разложении $b(x,\ t)$ ограничимся первым членом (не со-

держащим x). Приравнивая в (4.2.27) члены при одинаковых степенях $(x-m_t)$ и используя (4.2.30), получим

$$\dot{h}_t = -b(m_t, t)h_t^2 - 2h_t \frac{\partial a(m_t, t)}{\partial x} -$$

$$-\frac{1}{N}[y_t - S(m_t, t)]\frac{\partial^2 S(m_t, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{N}\left[\frac{\partial S(m_t, t)}{\partial x}\right]^2, \qquad (6.1.22)$$

$$\dot{m}_t = a(m_t, t) + \frac{1}{Nh_t}[y_t - S(m_t, t)]\frac{\partial S(m_t, t)}{\partial x}, \qquad (6.1.23)$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N}\left[S(m_t, t) + \frac{1}{2h_t}\frac{\partial^2 S(m_t, t)}{\partial x^2}\right] - \frac{1}{2N}\left[S^2(m_t, t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_t}\left(\frac{\partial S(m_t, t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{h_t}S(m_t, t)\frac{\partial^2 S(m_t, t)}{\partial x^2}\right]. \qquad (6.1.24)$$

Если сделать замену, перейдя к параметру $K_t = 1/h_t$, являющемуся апостериорной дисперсией (в гауссовском приближении) процесса x_t, то (22) принимает вид

$$\dot{K}_t = b(m_t, t) + 2K_t \frac{\partial a(m_t, t)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{K_t^2}{N}\left\{[y_t - S(m_t, t)]\frac{\partial^2 S(m_t, t)}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial S(m_t, t)}{\partial x}\right]^2\right\} \qquad (6.1.25)$$

(модификация (23), (24) очевидна).

Уравнения (22)—(25) и дают алгоритм совместного обнаружения и фильтрации сигналов в белом шуме, записанный в гауссовском приближении. При этом m_t представляет собой приближенную оценку параметра сигнала, а z_t — приближенный ЛП.

Отметим, что полученный алгоритм гауссовского приближения вытекает также и из системы (7), (8), (12).

Для этого в ней нужно положить

$$\mu_{it} = 0 \ (i \geq 3), \ \frac{\partial^2 a(m_t, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 b(m_t, t)}{\partial x^2} = 0,$$

и, кроме того, при конкретизации (12) учесть (19). В результате придем к системе уравнений, совпадающей с (23)—(25).

Таким образом, алгоритм совместного обнаружения и фильтрации в гауссовском приближении получается в результате усечения системы уравнений (7), (8), (12). Однако, как было выяснено выше, усеченная система (7), (8), (12) при выполнении (14) дает асимптотически оптимальные алгоритмы. Отсюда следует, что алгоритм гауссовского приближения является асимтотически оптимальным при большой апостериорной точности (14).

Отметим, что подтверждение применимости алгоритмов гауссовского приближения получено также и экспериментально [150], путем нахождения численного решения уравнения оптимальной нелинейной фильтрации с помощью ЦВМ.

Рассмотрим теперь общий многомерный случай, когда наблюдаемый процесс имеет вид (5.2.21). Симметризованные уравнения оптимального совместного обнаружения и фильтрации для этого случая определяются формулами (5.2.22)—(5.2.26). В целях упрощения последующей записи обозначим

$$\Phi = \Phi_1, \quad V = \Phi_0. \qquad (6.1.26)$$

Решая задачу в гауссовском приближении, представим АПВ $w_{1t}(\mathbf{x})$ и $w_{0t}(\mathbf{x})$ в виде

$$w_{\theta t}(x)=(2\pi)^{-m/2}\det{}^{-1/2}\|K^{\theta}_{ijt}\|\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m}h^{\theta}_{ijt}(x_i-m^{\theta}_{it})(x_j-m^{\theta}_{it})\right\},\quad \theta=0,\ 1; \quad (6.1.27)$$

$$\|K^{\theta}_{ijt}\|=\|h^{\theta}_{ijt}\|^{-1}. \quad (6.1.28)$$

Используя (5.2.22)—(5.2.26), (26), (27), получим уравнения квазиоптимального совместного обнаружения и фильтрации

$$\dot{h}^{\theta}_{ijt}=-\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial a^{\theta}_{nt}}{\partial x_i}h^{\theta}_{njt}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\partial a^{\theta}_{nt}}{\partial x_j}h^{\theta}_{int}-\sum_{n,\,p=1}^{m}b^{\theta}_{npt}h^{\theta}_{nit}h^{\theta}_{pjt}+\varphi^{\theta}_{ijt}, \quad (6.1.29)$$

$$\sum_{n=1}^{m}h^{\theta}_{int}\dot{m}^{\theta}_{nt}=\sum_{n=1}^{m}h^{\theta}_{int}a^{\theta}_{nt}+\psi^{\theta}_{it},$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{\theta}_{ijt}&=-\frac{1}{N}(y_t-\Phi_{\theta t})\frac{\partial^2\Phi_{\theta t}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{1}{N}\frac{\partial\Phi_{\theta t}}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_{\theta t}}{\partial x_j},\\ \psi^{\theta}_{it}&=\frac{1}{N}(y_t-\Phi_{\theta t})\frac{\partial\Phi_{\theta t}}{\partial x_i}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&i,\ j=1,\ 2,\dots,l,\ \text{при}\ \theta=1;\\ &i,\ j=q+1,\ q+2,\dots,l,\\ &\text{при}\ \theta=0,\end{aligned}$$

$\varphi^{\theta}_{ijt}=0,\quad \psi^{\theta}_{it}=0$ в остальных случаях;

$$\dot{z}=\frac{y_t}{N}\left(\Phi_{1t}-\Phi_{0t}+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{l}K^{1}_{ijt}\frac{\partial^2\Phi_{1t}}{\partial x_i\partial x_j}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=q+1}^{l}K^{0}_{ijt}\frac{\partial^2\Phi_{0t}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\frac{1}{2N}\left[\Phi^2_{1t}-\Phi^2_{0t}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i,\,j=1}^{l}K^{1}_{ijt}\left(\frac{\partial\Phi_{1t}}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_{1t}}{\partial x_j}+\Phi_{1t}\frac{\partial^2\Phi_{1t}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\sum_{i,\,j=q+1}^{l}K^{0}_{ijt}\left(\frac{\partial\Phi_{0t}}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_{0t}}{\partial x_j}+\Phi_{0t}\frac{d^2\Phi_{0t}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]. \quad (6.1.30)$$

При записи этих формул использованы обозначения:

$$a^{\theta}_{nt}=a_n(\mathbf{x},\ t)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}^{\theta}_t},$$

$$b^{\theta}_{npt}=b_{np}(\mathbf{x},\ t)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}^{\theta}_t},$$

($\mathbf{x}$ и $\mathbf{m}^{\theta}_t$ — m-мерные векторы)

$$\Phi_{1t}=\Phi_1(m_1^1,\dots,m_l^1,\ t),$$
$$\Phi_{0t}=\Phi_0(m^0_{q+1},\dots,m^0_l,\ t).$$

Уравнения (29), (30) определяют структуру двухканального ($\theta=1,0$) блока нелинейной фильтрации и блока формирования ЛП соответственно.

Уравнения (29) можно записать в другом виде, перейдя от h^{θ}_{ijt} к параметрам K^{θ}_{ijt}. При этом в (29) и (30) будут входить одни и те же параметры, так что обращение матриц (28) не потребуется. Воспользовавшись тем, что

$$\sum_{n=1}^{m} h^{\theta}_{int} K^{\theta}_{njt} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad \theta = 0,\ 1;$$

преобразуем (29) к виду

$$\dot{K}^{\theta}_{ijt} = \sum_{n=1}^{m} K^{\theta}_{jnt} \frac{\partial a^{\theta}_{it}}{\partial x_n} + \sum_{n=1}^{m} K^{\theta}_{int} \frac{\partial a^{\theta}_{jt}}{\partial x_n} + b^{\theta}_{ijt} +$$

$$+ \frac{1}{N}(y_t - \Phi_{\theta t}) \sum_{n,\, p=1} K^{\theta}_{int} K^{\theta}_{jpt} \frac{\partial^2 \Phi_{\theta t}}{\partial x_n \partial x_p} - \frac{1}{N} \sum_{n,\, p} K^{\theta}_{int} K^{\theta}_{jpt} \frac{\partial \Phi_{\theta t}}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi_{\theta t}}{\partial x_p}, \qquad (6.1.31)$$

$$\dot{m}^{\theta}_{it} = a^{\theta}_{it} + \frac{1}{N}(y_t - \Phi_{\theta t}) \sum_{j} K^{\theta}_{ijt} \frac{\partial \Phi_{\theta t}}{\partial x_j}.$$

Там, где не указаны пределы суммирования, оно осуществляется от 1 до l при $\theta = 1$ и от $q+1$ до l при $\theta = 0$. При решении конкретных задач можно пользоваться уравнениями, записанными в любой форме: (29) или (31).

Уравнения (29)—(31) позволяют синтезировать системы, осуществляющие совместное обнаружение и оценивание сигналов в присутствии коррелированных помех и белого шума. Сигнал и помеха «перемешаны» произвольным (но известным) образом, причем описываются, вообще говоря, негауссовскими распределениями вероятностей. В частных случаях, когда коэффициенты b_{ijt} не зависят от $\mathbf{x}$, а a_{it}, Φ_{1t}, Φ_{0t} зависят от компонент $\mathbf{x}$ линейным образом, уравнения (29)—(31) решают задачу синтеза точно, при этом они являются оптимальными алгоритмами совместного обнаружения и оценивания. В общем же случае данные уравнения представляют собой квазиоптимальные алгоритмы — алгоритмы гауссовского приближения.

6.2. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ГАУССОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ СИНТЕЗА

6.2.1. Фазомодулированный радиосигнал. Фазовая автоподстройка частоты в задаче совместного обнаружения и фильтрации. Рассмотрим задачу, когда обнаруживаемый в белом шуме сигнал

$$S(x_t,\ t) = A_0 \sin(\omega_0 t + x_t) \qquad (6.2.1)$$

является фазомодулированным процессом, причем A_0 и ω_0 — известные константы, а флюктуации фазы x_t определяются уравнением (4.3.17). Таким образом, здесь принято, что фаза x_t представляет собой гауссовский экспоненциально-коррелированный процесс. Сам сигнал (1) описывается негауссовским распределением.

Конкретизируем (6.1.22)—(6.1.24) применительно к (1) с учетом (4.3.18). При этом пренебрежем вибрационными членами с удвоенной частотой, дающими малый вклад. Отбросим также константу $A_0^2/4N$ в уравнении для ЛП, получающуюся от члена $(A_0^2/2N)\sin^2(\omega_0 t+x_t)$ (ее можно включить в значение порога обнаружения). В результате будем иметь [88]

$$\dot{h}_t=-\varkappa h_t^2+2\gamma h_t+\frac{y_t}{N}A_0\sin(\omega_0 t+m_t); \qquad (6.2.2)$$

$$\dot{m}_t=-\gamma m_t+\frac{y_t}{Nh_t}A_0\cos(\omega_0 t+m_t); \qquad (6.2.3)$$

$$\dot{z}_t=\frac{y_t}{N}\left(1-\frac{1}{2h_t}\right)A_0\sin(\omega_0 t+m_t). \qquad (6.2.4)$$

Полученные уравнения определяют структурную схему квазиоптимальной системы совместного обнаружения и оценивания (фазы) фазомодулированного сигнала. Отметим, что блок нелинейной фильтрации, описываемый (2), (3), моделируется следящим устройством типа фазовой автоподстройки частоты с переменным коэффициентом усиления в цепи обратной связи. Согласно (2) коэффициент усиления зависит от наблюдаемого процесса.

Если в (2), (3) положить $\gamma=0$, то получим уравнения, описывающие квазиоптимальную систему для случая, когда фаза сигнала (1) испытывает нестационарные блуждания и является винеровским процессом ($\dot{x}_t=\zeta_t$, см. (4.3.17)). Для этого случая в соответствии с (3), (4) на рис. 6.1 представлена структурная схема системы. (При моделировании (4) учтено, что при выполнении условий, необходимых для асимптотической оптимальности алгоритмов гауссовского приближения, апостериорная дисперсия $1/h_t$ мала, при этом $(1-1/2h_t)\approx 1$.)

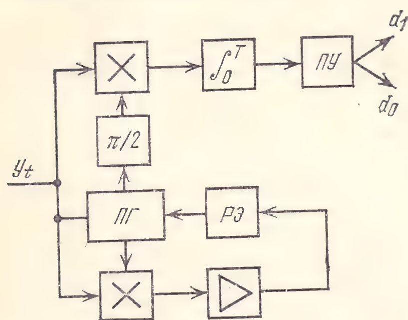


Рис. 6.1

На рис. 6.1 обозначено: ПГ — перестраиваемый генератор; РЭ — реактивный элемент, управляющий частотой ПГ; $\pi/2$ — фазовращатель, осуществляющий поворот фазы сигнала ПГ на $\pi/2$; ПУ — пороговое устройство. Коэффициент усиления $K=1/h_t$ усилителя в цепи обратной связи ПГ, вообще говоря, переменный, причем случайный (зависит от y_t). Поэтому схему рис. 6.1 следовало бы дополнить схемой регулировки усиления, структура которой определяется уравнением (2). Однако, стремясь к простоте технической реализации, можно в стационарном режиме пренебречь флюктуациями коэффициента усиления и взять в качестве его компоненту $\bar{K}=1/\bar{h}$ (в рамках гауссовского приближения), где $\bar{h}$ — среднее значение параметра h_t. Такая упрощающая процедура предложена в [60] при решении задач фильтрации. Ее можно применять и в задачах обнаружения, при этом усреднение соответствующих параметров нужно проводить при $\theta=1$. Последнее обусловлено тем, что при обработке сигналов необходимо наилучшим образом формировать оценку сигнала (как в режиме обнаружения, так и после его окончания), а не псевдооценку. Проведя указанное усреднение (см. [88]), получим (при $\gamma=0$)

$$\frac{1}{h}=\sqrt{\frac{2\varkappa N}{A_0^2}}. \qquad (6.2.5)$$

В результате приходим к постоянному коэффициенту усиления $\bar{K}$, при этом блок фильтрации в схеме рис. 6.1 будет моделироваться типовой схемой фазовой автоподстройки частоты (ФАП) 1-го порядка (коэффициент передачи фильтра нижних частот в цепи обратной связи равен 1).

Таким образом, синтезированная система представляет собой оценочно-корреляционный обнаружитель, блоком оценки которого служит типовая схема ФАП 1-го порядка. Чтобы получить обнаружитель, схема ФАП дополняется фазовращателем, умножителем (который может быть выполнен, например, при помощи фазового детектора), интегратором и пороговым устройством. Система осуществляет обнаружение, оценку сигнала и его параметра.

Проведенный синтез показал, каким образом должен строиться обнаружитель с использованием следящего фильтра в виде ФАП, и выявил квазиоптимальный характер подобной схемы для рассмотренной выше модели сигнала.

Отметим, что квазиоптимальный характер типовой фазовой автоподстройки частоты в режиме фильтрации (без обнаружения) при аналогичной модели сигнала был выяснен в [60, 130].

6.2.2. Частотно-модулированный радиосигнал. Рассмотрим теперь другой практически важный случай, когда полезный сигнал

$$S(x_{1t},\ t)=A_0\sin(\omega_0 t+x_{1t}) \qquad (6.2.6)$$

является частотно-модулированным процессом, для которого изменения фазы и частоты описываются уравнениями

$$\dot{x}_{1t}=x_{2t},\quad \dot{x}_{2t}=-\gamma x_{2t}+\zeta_t,$$
$$M\zeta_t=0,\quad M\zeta_t\zeta_{t+\tau}=\varkappa\delta(\tau). \qquad (6.2.7)$$

Сигнал (6), (7) может служить моделью доплеровского радиосигнала, при этом рассматриваемая задача может быть использована при решении вопросов обнаружения и измерения скорости движущейся цели*).

Конкретизируя уравнения (6.1.30), (6.1.31) для случая белого шума ($\Phi_0\equiv 0$) применительно к сигналу (6), (7) ($a_1(\mathbf{x})=x_2$, $a_2(\mathbf{x})=-\gamma x_2$, $b_{11}=b_{12}=b_{21}=0$, $b_{22}=\varkappa$), получим

$$\dot{m}_{1t}=m_{2t}+\frac{y_t}{N}K_{11t}A_0\cos(\omega_0 t+m_{1t}),$$
$$\dot{m}_{2t}=-\gamma m_{2t}+\frac{y_t}{N}K_{12t}A_0\cos(\omega_0 t+m_{1t}), \qquad (6.2.8)$$

$$\dot{z}_t=\frac{y_t}{N}A_0\sin(\omega_0 t+m_{1t}). \qquad (6.2.9)$$

Для определения коэффициентов K_{11t}, K_{12t} нужно дополнить (8), (9) тремя уравнениями (для K_{11t}, K_{12t}, K_{22t}), также непосредственно вытекающими из (6.1.31). После их усреднения получаются константы $\bar{K}_{11}$, $\bar{K}_{12}$, которые в целях упрощения схемы можно использовать в (8), вместо K_{11t}, K_{12t}. При этом алгоритм (8), (9) приводит к оценочно-кор-

*) Интересен также случай, когда подобный радиосигнал имеет неизвестную задержку [34].

реляционной системе, в которой блок оценки опять моделируется схемой ФАП. В отличие от предыдущего случая (рис. 6.1), здесь в цепи обратной связи ФАП имеются два канала (см. (8), в одном из них есть интегрирующая цепочка RC), образующие фильтр, который может быть представлен как пропорционально-интегрирующий фильтр [131].

В данном примере изменение частоты представляет собой гауссовский экспоненциально-коррелированный процесс (см. (7)). Остановимся на другом частном случае, когда процесс изменения частоты является винеровским процессом. Для этого в вышеприведенных формулах нужно положить $\gamma=0$. Соответствующая данному случаю схема системы, моделирующая (8), (9) ($\gamma=0$), показана на рис. 6.2. Блок оценки синтезированного оценочно-корреляционного обнаружителя представляет собой астатическую ФАП. Система наряду с обнаружением формирует оценку радиосигнала, а также оценку его частоты.

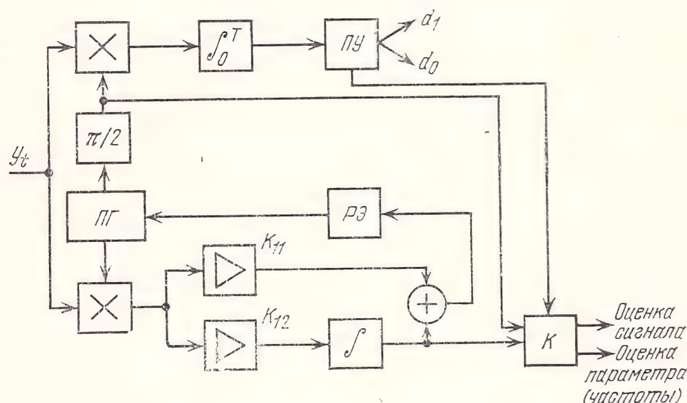


Рис. 6.2

6.2.3. Квазидетерминированные радиосигналы. Рассмотрим теперь более частные, тем не менее представляющие для практики определенный интерес задачи, когда параметры радиосигналов (фаза, частота), являются не случайными процессами, а случайными величинами. Такого рода задачи соответствуют задачам приема сигналов с неизвестными параметрами, постоянными на интервале наблюдения. Причем эти неизвестные параметры здесь рассматриваются как случайные величины с известными распределениями вероятностей.

Остановимся на квазидетерминированном радиосигнале с неизвестной фазой

$$S(x,\ t)=A_0\sin(\omega_0 t+x),\qquad \dot{x}=0. \tag{6.2.10}$$

Алгоритм гауссовского приближения для этого случая вытекает из уравнений (2)—(4), если в них положить

$$\gamma=\varkappa=0. \tag{6.2.11}$$

В результате получаем, что асимптотически оптимальная (в гауссовском приближении) система совместного обнаружения и измерения фазы квазидетерминированного сигнала представляет оценочно-корре-

ляционный обнаружитель (типа рис. 6.1) с блоком оценки в виде ФАП с переменным коэффициентом усиления.

На рис. 6.3 приведены графики, иллюстрирующие характер изменения во времени коэффициента усиления K в кольце ФАП для трех значений отношения сигнал/шум q. Эти зависимости получены в результате численного решения усредненного уравнения (2) для случая (11) (сделан приближенный переход от дифференциального уравнения к рекуррентному соотношению, см. [19]). В качестве начального условия выбрано значение $K_0=1$. Из этих графиков, в частности, видно, что с возрастанием времени наблюдения (t_i, $i=0, 1, 2, \ldots$) коэффициент усиления уменьшается, причем тем быстрее, чем больше отношение сигнал/шум.

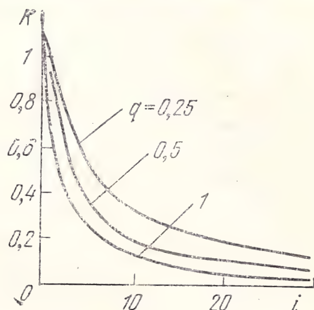


Рис. 6.3

Рассмотрим теперь квазидетерминированный радиосигнал с неизвестным смещением частоты

$$S(x_{1t},\ t)=A_0 \sin(\omega_0 t+x_{1t}),\quad \dot{x}_{1t}=x_2,\quad \dot{x}_2=0. \tag{6.2.12}$$

Алгоритмы для этого случая (ср. с (6), (7)), получаются из (8), (9), если туда подставить (11). В результате приходим к системе совместного обнаружения радиосигнала и оценивания его частоты (структурная схема на рис. 6.2), у которого блоком оценки является астатическая ФАП.

Коэффициенты усиления в кольце ФАП определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{K}_{11t}&=2K_{12t}-\frac{y_t}{N}K_{11t}^2 A_0 \sin(\omega_0 t+m_{1t}),\\ \dot{K}_{12t}&=K_{22t}-\frac{y_t}{N}K_{11t}K_{12t}A_0 \sin(\omega_0 t+m_{1t}),\\ \dot{K}_{22t}&=-\frac{y_t}{N}K_{12t}^2 A_0 \sin(\omega_0 t+m_{1t}),\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

непосредственно вытекающими из (31) для случая (12). Из (13) следует, что в стационарном режиме

$$K_{11}=K_{12}=K_{22}=0. \tag{6.2.14}$$

Таким образом, коэффициенты усиления в кольце ФАП по мере увеличения времени наблюдения уменьшаются и в пределе (при $t\longrightarrow\infty$) равны нулю — обратная связь разрывается. Это будет соответствовать точному измерению, когда апостериорная дисперсия K_{11t}, определяющая ошибку измерения частоты, равна нулю.

Отметим, что в целях упрощения схемы рис. 6.2 и здесь коэффициенты K_{11}, K_{12} можно заменить на определенным образом выбранные константы (аналогично [107]). Однако они из-за (14) уже не будут соответствовать стационарному режиму работы (в предыдущих задачах — п. 6.2.1 и 6.2.2 — когда параметры сигнала были случайными процессами, можно было выбрать ненулевые коэффициенты усиления, соответствующие стационарному режиму, см., например, (5)). При этом нулевую ошибку измерения частоты квазидетерминированного сигнала в такой схеме реализовать не удастся даже при $t\longrightarrow\infty$. Итак, асимптотически оптимальной (при большой апостериорной точности) системой совместного обнаружения и измерения частоты квазидетерминированно-

го радиосигнала является оценочно-корреляционный обнаружитель, блок оценки которого представляет собой астатическую ФАП с переменными параметрами.

Выше отмечалось, что параметры рассматриваемых здесь квазидетерминированных сигналов являются случайными величинами с известными априорными распределениями. Однако, нетрудно видеть, эти априорные распределения на структуру синтезируемых алгоритмов гауссовского приближения никак не влияют. Они определяют лишь начальные условия, выбор которых становится некритичным при большом времени наблюдения.

6.2.4. Фазомодулированный радиосигнал и гауссовская помеха. Перейдем к рассмотрению более сложных задач, когда на полезный сигнал, помимо белого шума, воздействует коррелированная помеха. При этом вначале остановимся на случае гауссовской помехи. В качестве примера рассмотрим задачу приема фазомодулированного радиосигнала, причем пусть

$$y_t = \theta A_0 \sin(\omega_0 t + x_{1t}) + x_{2t} + \xi_t, \quad \theta = 0,\ 1, \tag{6.2.15}$$
$$\dot{x}_{1t} = \zeta_t, \quad \mathrm{M}\zeta_t\zeta_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau),$$
$$\dot{x}_{2t} = -\mu x_{2t} + \zeta_{0t}, \quad \mathrm{M}\zeta_{0t}\zeta_{0,\,t+\tau} = \nu\delta(\tau).$$

Конкретизация (6.1.30), (6.1.31) применительно к (15) дает следующие уравнения для оценки фазы сигнала m^1_{1t}, оценки коррелированной помехи m^1_{2t} и для ЛП:

$$\dot{m}^1_{1t} = \frac{1}{N}(y_t - m^1_{2t})\, K_{11t} A_0 \cos(\omega_0 t + m^1_{1t}) + \frac{K_{12t}}{N}\left[y_t - A_0 \sin(\omega_0 t + m^1_{1t}) - m^1_{2t}\right], \tag{6.2.16}$$

$$\dot{m}^1_{2t} = -\mu m^1_{2t} + \frac{1}{N}(y_t - m^1_{2t})\, K_{12t} A \cos(\omega_0 t + m^1_{1t}) + \frac{K_{22t}}{N}\left[y_t - A_0 \sin(\omega_0 t + m^1_{1t}) - m^1_{2t}\right], \tag{6.2.17}$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N}\left\{\left(1 - \frac{K^1_{11t}}{2}\right) A_0 \sin(\omega_0 t + m^1_{1t}) + m^1_{2t} - m^0_{2t}\right\} - \frac{1}{2N}\left\{(m^1_{2t})^2 - (m^0_{2t})^2 + 2m^1_{2t}(1 - K^1_{11t}) A_0 \sin(\omega_0 t + m^1_{1t}) + 2K_{12t} A_0 \cos(\omega_0 t + m^1_{1t}) + K^1_{22t} - K^0_{22t}\right\}$$

(уравнения для коэффициентов K^1_{11t}, K^1_{12t}, K^1_{22t}, также вытекающие из (6.1.31), опущены).

Уравнения (16) дают структурную схему устройства, осуществляющего нелинейную фильтрацию сигнала и помехи из белого шума. Это устройство является квазиоптимальным приближением для данного примера блока ОФ$_1$ на рис. 5.1.

Уравнения для m^0_{2t} оценка помехи при $\theta = 0$) и для K^0_{22t}, как нетрудно видеть, совпадают с (5.3.11), (5.3.12) ($m^0_{2t} = m_{0t}$, $K^0_{22t} = 1/h_t$). Они определяют второй канал (блок ОФ$_0$ на рис. 5.1), который осуществляет линейную фильтрацию. Отфильтрованная по обоим каналам помеха компенсируется в блоке ЛП при помощи вычитания (см. (17)).

6.2.5. Негауссовские помехи. Для иллюстрации развитых в п. 6.1 общих методов рассмотрим также пример, когда коррелированная помеха описывается негауссовским

распределением вероятностей. Предположим, что сигнал и помеха однотипны по своей структуре и являются фазомодулированными процессами, причем

$$y_t = \theta A_0 \sin(\omega_0 t + x_{1t}) + B_0 \sin(\Omega_0 t + x_{2t}) + \zeta_t, \quad \theta = 0,\ 1, \tag{6.2.18}$$
$$\dot{x}_{jt} = f_j(x_{jt}) + \zeta_{jt}, \quad j = 1,\ 2,$$

где ζ_{1t}, ζ_{2t} — гауссовские дельта-коррелированные процессы. Функции f_1, f_2, определяющие законы фазовой модуляции сигнала и помехи соответственно, предполагаются известными. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейные, то параметры x_{1t}, x_{2t} — марковские гауссовские процессы. При нелинейных функциях указанные параметры являются негауссовскими процессами. Сами же помеха и сигнал являются негауссовскими процессами даже при гауссовском параметре.

Конкретизируя (6.1.30), (6.1.31) применителньо к (18), получим уравнения, определяющие оценку m^1_{1t} фазы сигнала, оценки m^1_{2t} и m^0_{2t} фазы помехи (соответствуют двум ситуациям: $\theta = 1$ и $\theta = 0$) и ЛП

$$\dot{m}^1_{jt} = f_j(m^1_{jt}) + \frac{y_t}{N}\left[K^1_{j1t} A_0 \cos(\omega_0 t + m^1_{1t}) + \right.$$
$$\left. + K_{j2} B_0 \cos(\omega_0 t + m^1_{2t})\right] - \frac{1}{2N} A_0 B_0 \sin\left[(\omega_0 - \Omega_0) t + \right.$$
$$\left. + (m^1_{1t} - m^1_{2t})\right] (K_{j2t} - K_{j1t}),$$
$$j = 1,\ 2; \tag{6.2.19}$$

$$\dot{m}^0_{2t} = f_2(m^0_{2t}) + \frac{1}{N} y_t K^0_{22t} B_0 \cos(\Omega_0 t + m^0_{2t}), \tag{6.2.20}$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N}\left[\left(1 - \frac{K^1_{11t}}{2}\right) A_0 \sin(\omega_0 t + m^1_{1t}) + \left(1 - \frac{K^1_{22t}}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times B_0 \sin(\Omega_0 t + m^1_{2t}) - \left(1 - \frac{K^0_{22t}}{2}\right) B_0 \sin(\Omega_0 t + m^0_{2t})\right] -$$
$$- \frac{1}{2N}\left(1 - K^1_{12t} - \frac{K^1_{11t}}{2} - \frac{K^1_{22t}}{2}\right) (A_0 B_0)^2 \cos\left[(\omega_0 - \Omega_0) t + (m^1_{1t} - m^1_{2t})\right], \tag{6.2.21}$$

(Эти уравнения, вообще говоря, нужно дополнить уравнениями для коэффициентов K^1_{11t}, K^1_{12t}, K^1_{22t} и K^0_{22t}, вытекающими из (6.1.31).)

Первый канал, предназначенный для выделения сигнала и помехи из шума, представляет собой систему двух устройств типа ФАП, связанных друг с другом (см. (19)). Второй канал (см. (20)), предназначенный для выделения помехи, значительно проще первого. При $f_2(x) = \mu x$ или $f_2(x) = 0$ он совпадает с теми схемами ФАП, которые имели место в п. 6.2.1. В отличие от примера предыдущего пункта второй канал является нелинейным (поскольку помеха негауссовская). При формировании ЛП (см. (21)) в результате вычитания соответствующих оценок помехи осуществляется ее частичная компенсация.

Квазиоптимальные алгоритмы совместного обнаружения и оценивания, полученные в последних двух пунктах настоящего параграфа, оказались сравнительно сложными. Это и неудивительно, ибо сами поставленные задачи (15) и (18) достаточно сложны.

Рассмотренные выше приближенные методы, в частности, метод гауссовского приближения, давали алгоритмы, асимптотически оптимальные при условии большой апостериорной точности, для выполнения которого необходимо располагать достаточно большим отношением сигнал/шум (если не рассматривать случай высокой априорной точности (см. п. 6.1.1)).

Однако для практики представляет также интерес (особенно в задаче обнаружения) случай малого отношения сигнал/шум — проблема приема слабых сигналов, к рассмотрению которой мы и переходим.

6.3.1. Слабый сигнал и асимптотическая оптимальность. Пусть наблюдаемые данные имеют вид (4.1.1). Полезный сигнал $S(x_i, t_i)$, параметр которого является марковским процессом, и помеха с независимыми значениями ξ_i задаются так же, как и в п. 4.1.1. Ранее была получена формула (4.1.27) для ОП, определяющая многоканальный обнаружитель, вообще говоря, с бесконечным числом каналов.

Рассмотрим возможность ограничения числа каналов. Это ограничение непосредственно связано с ограничением числа членов ряда (4.1.24). Последняя возможность появляется при достаточно малых членах S, т. е. при слабом сигнале.

Поскольку сигнал случайный, то его «малость» следует понимать в вероятностном смысле, причем определяться она может по-разному. Так, введя числовой параметр $m=1, 2, \ldots$, малость сигнала S_m можно связать с одним из видов вероятностной сходимости его к нулю

$$S_m \xrightarrow{p} 0, \qquad S_m \xrightarrow{r} 0, \qquad S_m \xrightarrow{\text{п.н.}} 0. \tag{6.3.1}$$

Здесь приняты следующие обозначения видов сходимости последовательности случайных величин (см. [71]): p — по вероятности; r — в среднем r-го порядка; п. н.— почти наверное или с вероятностью 1. Отметим, что уже из наиболее слабой сходимости (по вероятности) сигнала к нулю следует сходимость априорной плотности сигнала к дельта-функции $\delta(S)$. Можно показать, что это повлечет сходимость также к дельта-функции апостериорной плотности и сходимость к нулю оценок $\widehat{S^i}$, причем тем более быструю, чем больше i.

Малость сигнала можно характеризовать не только абсолютно, но и относительно — по сравнению с уровнем шума. Для этого введем числовой параметр q_{sk}, при котором $S(x_k)=q_{sk}S_0(x_k)$, причем положим, например, $q_{sk}=\mathbf{M}S^2(x_k)$. Далее нормируем наблюдаемую последовательность:

$$y_k/q_{\xi k}=y_{0k}, \qquad q_{\xi k}=\mathbf{D}(\xi_k).$$

Задача (4.1.1) равносильна задаче обнаружения при наблюдении

$$y_{0k}=\theta q_k S_0(x_k)+\xi_{0k}, \qquad \theta=0, 1, \qquad k=1, 2, \ldots, n, \tag{6.3.2}$$

где $\xi_{0k}=\xi_k/q_{\xi k}$, а $q_k=q_{sk}/q_{\xi k}$ — отношение сигнал/шум (для k-й выборки). При этом оптимальный алгоритм (4.1.27) применительно к нормированным наблюдаемым данным приобретает вид

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k\left[1+\sum_{i=1}^{\infty} q^i_{k+1}\widehat{S^i}_{0k,\,k+1} f_{0i}(y_{0,\,k+1})\right], \tag{6.3.3}$$

где оценки $\widehat{S^i_{0k,\,k+1}}$ и функции f_{0i} определяются аналогично (4.1.25), (4.1.26).

Рассматривая случай малого отношения сигнал/шум, пренебрежем в (3) членами, содержащими q^i_{k+1} при $i \geqslant 2$. В результате получим алгоритм

$$\widetilde{\Lambda}_{k+1} = \widetilde{\Lambda}_k \left[1 + q_{k+1}\widehat{S}_{0k,\,k+1} f_{01}(y_{0,\,k+1})\right]. \qquad (6.3.4)$$

Переходя к $\tilde{z}_k = \ln \widetilde{\Lambda}_k$, учитывая при этом малость q_{k+1}, будем иметь

$$\widetilde{z}_{k+1} = \widetilde{z}_k + q_{k+1}\widehat{S}_{0k,\,k+1} f_{01}(y_{0,\,k+1}), \qquad (6.3.5)$$

или

$$\widetilde{z}_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{k+1}\widehat{S}_{0k,\,k+1} f_{01}(y_{0,\,k+1}). \qquad (6.3.6)$$

Введем несущественное для прикладных задач ограничение

$$\mathrm{M}\,|\,\widehat{S}_{0,\,k-1,\,k} f_{01}(y_{0k})\,|^2 < \infty, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6.3.7)$$

Тогда

$$\lim_{q_k \to 0} q_k^2 \mathrm{M}\,|\,\widehat{S}_{0,\,k-1,\,k} f_{01}(y_{0k})\,|^2 = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6.3.8)$$

Теперь вычислим $\lim\limits_{q_k \to 0} \mathrm{M}\,|\,\widetilde{z}_n\,|^2$. Используя (6) и неравенство

$$\mathrm{M}\,|\,\xi + \zeta\,|^2 \leqslant 2\mathrm{M}\,|\,\xi\,|^2 + 2\mathrm{M}\,|\,\zeta\,|^2, \qquad (6.3.9)$$

учитывая при этом (8), получим

$$\lim_{q_k \to 0} \mathrm{M}\,|\,\widetilde{z}_n\,|^2 = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6.3.10)$$

Если сигнал сходится к нулю, то можно убедиться в сходимости и статистики оптимального обнаружения

$$z_n = \ln \frac{p(y_1{}^n \mid \theta = 1)}{p(y_1{}^n \mid \theta = 0)}$$

к нулю. Связав сходимость сигнала к нулю с $q_k \longrightarrow 0$, будем, в частности, иметь

$$\lim_{q_k \to 0} \mathrm{M}\,|\,z_n\,|^2 = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6.3.11)$$

В результате, используя (9)—(11), приходим к асимптотической эквивалентности — сходимости алгоритмов $\tilde{z}_n$ и z_n в среднеквадратическом

$$\lim_{q_k \to 0} \mathrm{M}\,|\,\widetilde{z}_n - z_n\,|^2 = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \qquad (6.3.12)$$

Аналогичным образом при слабых ограничениях типа (7) с использованием C_r-неравенства (см. [71]) устанавливается асимптотическая эквивалентность алгоритмов в среднем r-го порядка.

Итак, максимальное сокращение числа каналов — переход от статистики оптимального обнаружения (3) к алгоритму (4) или (5), (6) — приводит, конечно, к потере качества обработки. Однако вследствие асимптотической эквивалентности алгоритмов $\tilde{z}_n$ и z_n эти потери при достаточно слабом сигнале незначительны, причем в пределе они стремятся к нулю. Таким образом, алгоритм (4) — (6) является асимптотически оптимальным.

Отметим, что выбрать величину порога, с которым сравнивается $\tilde{z}_n$, можно различными способами, причем на структуре рассматриваемого асимптотически оптимального обнаружителя это не сказывается. Поскольку алгоритмы $\tilde{z}_n$ и z_n могут быть асимптотически эквивалентны в различном вероятностном смысле, то и асимптотическая оптимальность может быть соответственно нескольких видов, т. е. она не определяется однозначно. Кроме того, отметим, что если в (3) отбросить члены, содержащие q^i_{k+1}, например, при $i \geqslant 3$, то опять придем к алгоритму, асимптотически эквивалентному оптимальному при $q_{k+1} \longrightarrow 0$. Однако, руководствуясь принципом минимальной сложности алгоритмов, мы здесь рассматриваем только такие, которые получаются при максимальном сокращении членов ряда (3), когда остается лишь один его член.

К алгоритму, подобному (6), можно также прийти, используя критерий локальной оптимальности [160]. Согласно этому критерию, выбирается обнаружитель, для которого средний риск и его первая производная (по q) являются такими же, как и у байесовского обнаружителя при $q=0$. Следствием такого подхода является то, что в разложении ЛП по степеням отношения сигнал/шум q нужно оставлять члены порядка $O(q)$.

Рассмотренные критерии приводят к алгоритмам, близким к оптимальным лишь при $q \longrightarrow 0$, не давая никаких гарантий относительно близости к оптимальной системе при значениях q, обеспечивающих удовлетворительное качество обнаружения. В этом смысле от указанных критериев выгодно отличается критерий асимптотической эффективности и асимптотической оптимальности [63, 64]. Согласно этому критерию отыскивается асимптотически достаточная статистика обнаружения при неограниченном увеличении размера выборки ($n \longrightarrow \infty$) и стремлении амплитуды λ_n полезного сигнала к нулю ($\lambda_n \longrightarrow 0$). При этом убывание амплитуды при $n \longrightarrow \infty$ определяется соотношением

$$\lambda_n = \gamma / \sqrt{n}, \tag{6.3.13}$$

где γ — положительная константа. Такой характер уменьшения амплитуды приводит к тому, что энергия сигнала для выборки любого размера является ограниченной. В результате задача обнаружения не вырождается*). Асимптотически оптимальные алгоритмы [64] при $n \longrightarrow \infty$ обладают той же эффективностью, что и оптимальный (по критерию Неймана — Пирсона) алгоритм обнаружения.

Однако и этот критерий асимптотической оптимальности не свободен от недостатков. В частности, критерий [63, 64] не гарантирует близость к оптимальной системе при конечных выборках.

---

*) Строгое построение асимптотической теории невырожденных задач обнаружения слабых сигналов связано с понятием контигуальности [86]. Это понятие является формализацией такой «близости» друг к другу последовательностей вероятностных мер, соответствующих проверяемой гипотезе и альтернативе, при которой вероятности ошибок 1-го и 2-го рода имеют заданные ненулевые пределы.

Вернемся теперь к найденным алгоритмам (5), (6). В дальнейшем знак $\sim$ и нормировочные константы будут опускаться, при этом асимптотически оптимальный обнаружитель слабых сигналов на фоне помех с независимыми значениями примет вид

$$z_{k+1}=z_k+\widehat{S}_{k,\,k+1}f_1\,(y_{k+1}),$$

$$z_n=\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{S}_{k,\,k+1}f_1\,(y_{k+1}), \tag{6.3.14}$$

Структурная схема его показана на рис. 6.4. Безынерционный нелинейный преобразователь (БНП) согласно (4.1.26) имеет характеристику

$$f_1\,(y)=-\frac{1}{\rho\,(y)}\frac{\partial\rho\,(y)}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\ln\rho\,(y). \tag{6.3.15}$$

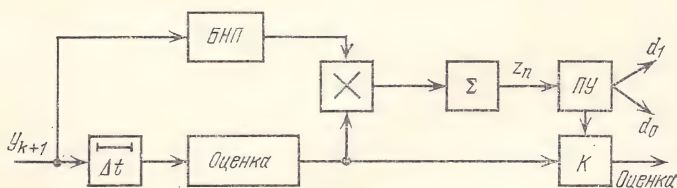


Рис. 6.4

Блок оценки формирует экстраполяционную (на один шаг) оценку (см. (4.1.25))

$$\widehat{S}_{k,\,k+1}=M\,[S\,(x_{k+1},\ t_{k+1}\,|\,y_1^{\,k},\ \theta=1]=$$

$$=\int S\,(x_{k+1},\ t_{k+1})\,\pi\,(x_{k+1}\,|\,x_k)\,w\,(x_k)\,dx_k dx_{k+1}. \tag{6.3.16}$$

оптимальную в смысле минимума среднеквадратической ошибки. Рассматриваемая система представляет собой коррелятор наблюдаемых данных, пропущенных через безынерционный нелинейный преобразователь (15), с указанной оценкой полезного сигнала. Таким образом, алгоритм (14) определяет оценочно-корреляционный асимптотически оптимальный обнаружитель слабых сигналов.

В том частном случае, когда помеха является гауссовской (4.3.4), нелинейный преобразователь вырождается в линейный:

$$f_1\,(y)=\frac{1}{\sigma_\theta^{\,2}}\,y. \tag{6.3.17}$$

При этом алгоритм (14) переходит в алгоритм

$$z_n=\frac{1}{\sigma_0^{\,2}}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{S}_{k,\,k+1}y_{k+1}, \tag{6.3.18}$$

осуществляя процедуру корреляции оценки непосредственно с самими наблюдаемыми данными.

6.3.2. Коррелированная негауссовская помеха. Перейдем к более общей задаче, когда помеха является марковским процессом (с дискрет-

ным временем, переходная плотность $\rho(\eta_{k+1}|\eta_k)$), сигнал — прежний. Рассматривая случай аддитивных помех, запишем выражение для ОП, непосредственно вытекающее из (5.1.4), если учесть (5.1.5′):

$$\Lambda_{k+1}=\frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)}\times$$
$$\times\int\int\rho\,[y_{k+1}-S(x_{k+1})\mid y_k-S(x_k)]\,\pi(x_{k+1}\mid x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1},$$
$$k=1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (6.3.19)$$

Разложим $\rho[y_{k+1}-S(x_{k+1})\,|\,y_k-S(x_k)]$ в двумерный ряд по степеням $S(x_{k+1})$, $S(x_k)$. Поступая аналогично предыдущему, в случае слабых сигналов получим

$$z_{k+1}=z_k+\widehat{S}_{k,\,k+1}\varphi_1(y_k,\ y_{k+1})+\widehat{S}_k\varphi_2(y_k,\ y_{k+1}), \qquad (6.3.20)$$

$$z_n=\sum_{k=0}^{n-1}[\widehat{S}_{k,\,k+1}\varphi_1(y_k,\ y_{k+1})+\widehat{S}_k\varphi_2(y_k,\ y_{k+1})]. \qquad (6.3.21)$$

Здесь $\widehat{S}_{k,k+1}$ — экстраполяционная оценка, имеющая прежний смысл:

$$\widehat{S}_{k,\,k+1}=M[S(x_{k+1},\ t_{k+1})\mid y_1^{\,k},\ \theta=1], \qquad (6.3.22)$$

а $\widehat{S}_k$ представляет собой фильтрационную оценку сигнала

$$\widehat{S}_k=M[S(x_k,\ t_k)\mid y_1^{\,k},\ \theta=1]. \qquad (6.3.23)$$

Функции φ_1 и φ_2 описывают теперь инерционные (в отличие от случая помех с независимыми значениями) нелинейные преобразователи:

$$\varphi_1(y_k,\ y_{k+1})=-\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\ln\rho\,(y_{k+1}\mid y_k),$$
$$(6.3.24)$$
$$\varphi_2(y_k,\ y_{k+1})=-\frac{\partial}{\partial y_k}\ln\rho\,(y_{k+1}\mid y_k).$$

(Если начальные условия для (20) выбираются в соответствии с (5.1.5), то в (21) нужно положить $\widehat{S}_{01}=MS(x_1)$,

$$\varphi_1(y_0,\ y_1)=f_1(y_1),\ \widehat{S}_0\varphi_2(y_0,\ y_1)=0.)$$

Аналогично предыдущему, алгоритм (20), (21) определяет асимптотически оптимальный обнаружитель слабых сигналов. Основные операции сводятся к обработке оценочно-корреляционного типа.

Предыдущий алгоритм (14) является частным случаем (20), (21), когда $\rho(\eta_{k+1}|\eta_k)=\rho(\eta_{k+1})$, при этом $\varphi_1=f_1$, $\varphi_2=0$.

Важную роль в найденной оценочно-корреляционной структуре обнаружителей играют блоки среднеквадратических оценок. В общем случае фильтрационные среднеквадратические оценки синтезируются согласно (23) с использованием апостериорных плотностей, определяемых соответствующими рекуррентными соотношениями (см. п. 5.1) (об экстраполяционных оценках речь пойдет в гл. 11). В настоящем параграфе основное внимание уделено выяснению общей структуры асимптотически оптимальных обнаружителей без конкретизации блоков оценок.

Отметим, что можно было бы рассмотреть также случай, когда, помимо коррелированной (марковской) помехи, присутствует шум с не-

зависимыми значениями. Используя разложение по малому параметру в (5.1.11), получим асимптотически оптимальный алгоритм обнаружения. Здесь мы останавливаться на этом вопросе не будем, однако вернемся к нему при рассмотрении более общих (немарковских) моделей помех (см. п. 7.2.2).

6.3.3. Частный случай (детерминированные сигналы). В предыдущей задаче никаких других ограничений, кроме условия марковости, на помеху и параметр сигнала не накладывалось. Они могут быть гауссовскими и негауссовскими, коррелированными и некоррелированными, детерминированными и квазидетерминированными.

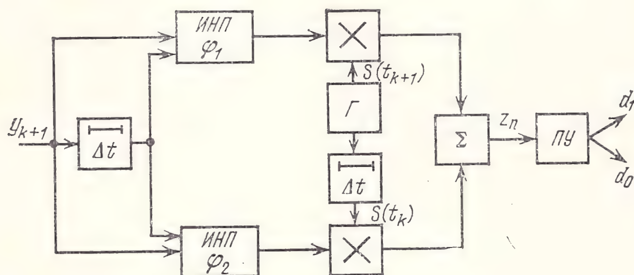


Рис. 6.5

В частном случае детерминированных сигналов

$$\hat{S}_{k,\,k+1} = S(t_{k+1}), \qquad \hat{S}_k = S(t_k),$$

в результате чего предыдущие алгоритмы упрощаются. Так алгоритм (21) приобретает вид

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} [S(t_{k+1})\,\varphi_1(y_k,\ y_{k+1}) + S(t_k)\,\varphi_2(y_k,\ y_{k+1})] \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_{k+1}. \tag{6.3.25}$$

Схема этого обнаружителя показана на рис. 6.5. Характеристики инерционных нелинейных преобразователей (ИНП) определяются формулами (24). Путем непосредственного расчета нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{M}\Delta z_k \Delta z_l - \mathrm{M}\Delta z_k \mathrm{M}\Delta z_l = 0 \quad \text{при } k \neq l.$$

Таким образом, при обнаружении сигналов в коррелированных негауссовских помехах приемник перед накоплением осуществляет декорреляцию наблюдаемых данных при помощи нелинейного инерционного устройства.

В частном случае при гауссовской экспоненциально-коррелированной помехе асимптотически оптимальный обнаружитель (25) переходит в оптимальный (нужно подставить (5.3.2) в (24) и затем конкретизировать (25)):

$$z_n = \frac{1}{\sigma_0^2(1-R^2)} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k R)(S_{k+1} - S_k R). \tag{6.3.26}$$

Алгоритм (26) тоже осуществляет декорреляцию, но уже при помощи линейного инерционного устройства. Последнее в случае непрерывного времени переходит в обеляющий фильтр (рис. 5.3,a).

При негауссовских помехах с независимыми значениями из (25) (или из (14)) получаем более простой алгоритм

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} S(t_{k+1}) f_1(y_{k+1}). \tag{6.3.27}$$

Этот алгоритм допускает следующую интерпретацию (рис. 6.6): на входе «гауссовского» приемника — коррелятора или согласованного фильтра — следует поставить безынерционный нелинейный преобразователь (БНП), характеристика которого вычисляется по формуле (15) *). В том случае, когда помеха является гауссовской, БНП вырождается в линейный преобразователь (17), при этом асимптотически оптимальный обнаружитель (рис. 6.6) переходит в оптимальный.

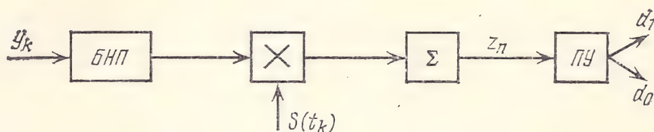


Рис. 6.6

Следует отметить, что одна и та же структура (27) получена разными методами, связанными с разными подходами к проблеме асимптотической оптимальности [4, 17, 18, 64, 101].

Алгоритмы (25), (27) определяют схемы асимптотически оптимальных обнаружителей слабых детерминированных сигналов на фоне негауссовских помех. Первый, естественно, сложнее второго, поскольку он оптимизирован под более сложную модель помехи (коррелированную).

Для построения схем нелинейных преобразователей (ИНП и БНП) необходимо знать распределение помех. Например, в ряде случаев одномерная плотность вероятностей импульсных помех хорошо аппроксимируется функцией [140]

$$\rho(y) = A \exp(-a|y|^{\nu}), \tag{6.3.28}$$

где ν принимает значения от 0,5 до 2 (в зависимости от характера помехи), а коэффициенты A и a определяются ее интенсивностью (эти коэффициенты, кроме того, должны выбираться в соответствии с условием нормировки, если (28) — плотность вероятностей). Характеристика БНП (15) при такой помехе равна:

$$f_1(y) = a\nu |y|^{\nu-1} \operatorname{sign} y.$$

В случае $\nu=1$, что соответствует распределению Лапласа,

$$\rho(y) = \frac{a}{2} \exp(-a|y|), \tag{6.3.29}$$

имеем

$$f_1(y) = a \operatorname{sign} y, \tag{6.3.30}$$

т. е. БНП является идеальным ограничителем.

*) Найденная структура обнаружителя получит обобщение в п. 7.2.2.

Как следует из § 6.1, в задаче обнаружения и оценивания непрерывных сигналов вектор достаточных статистик является, вообще говоря, бесконечномерным. Ограничение числа статистик проводилось путем параметризации апостериорного распределения и усечения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

В настоящем параграфе излагается метод синтеза, в основе которого лежит другой способ ограничения числа моделируемых статистик. При нем область определения параметра сигнала разбивается на конечное число подобластей, при этом осуществляется переход от апостериорной плотности вероятностей к совокупности соответствующих апостериорных вероятностей. В результате приходим к многоканальным приемникам [18]. Ниже рассматривается случай дискретного времени, однако излагаемый метод непосредственно распространяется и на случай непрерывного времени [18].

6.4.1. Алгоритм для апостериорных вероятностей и для отношения правдоподобия. Наблюдаемые данные имеют вид

$$y_k = \theta S(x_k, t_k) + \eta_k, \quad \theta = 0, 1, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{6.4.1}$$

где $\{x_k\}$, $\{\eta_k\}$ — стационарные марковские процессы, определяемые соответственно переходными $\pi(x_{k+1}|x_k)$, $\rho(\eta_{k+1}|\eta_k)$ и начальными $\pi(x_1)$, $\rho(\eta_1)$ плотностями вероятностей. Следует отметить, что при разработке общих методов в предыдущих задачах условие стационарности на марковские процессы не накладывалось. Это условие, вообще говоря, необязательно и для излагаемого ниже метода. Однако здесь условие стационарности указанных процессов будет использоваться, поскольку при нем получаются более простые схемы, на которых удобно иллюстрировать некоторые закономерности построения многоканальных устройств.

Рекуррентное соотношение для АПВ в случае (1) непосредственно вытекает из (5.1.3):

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\int \rho[y_{k+1} - S_{k+1}(x_{k+1}) \mid y_k - S_k(x_k)]\pi(x_{k+1} \mid x_k) w_k(x_k) dx_k}{\iint \rho[y_{k+1} - S_{k+1}(x_{k+1}) \mid y_k - S_k(x_k)]\pi(x_{k+1} \mid x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1}} \tag{6.4.2}$$

(здесь обозначено $S_k(x_k) \equiv S(x_k, t_k)$), а рекуррентное соотношение для ОП дается формулой (6.3.19).

Чтобы упростить моделирование, перейдем от оптимальных алгоритмов (2), (6.3.19) к квазиоптимальным. Для этого разобьем интервал (x^0, x^m) априорно возможных значений параметра $x \in (x^0, x^m)$ сигнала $S(x, t)$ точками $x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}$ на m подынтервалов (x^j, x^{j+1}). Вместо АПВ $w_{k+1}(x_{k+1})$ будем рассматривать совокупность апостериорных вероятностей

$$w_{k+1}(j) = \int_{x^j}^{x^{j+1}} w_{k+1}(x_{k+1}) dx_{k+1}, \tag{6.4.3}$$

определяющих вероятность того, что значение параметра x на $(k+1)$-м шаге наблюдения заключено в интервале (x^j, x^{j+1}).

Подставив (2) в (3), получим

$$w_{k+1}(j)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{i}\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\mid y_k-S_k(x_k)]\pi(x_{k+1}\mid x_k)w_k(x_k)dx_kdx_{k+1}}{\sum\limits_{ij}\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\mid y_k-S_k(x_k)]\pi(x_{k+1}\mid x_k)w_k(x_k)dx_kdx_{k+1}}, \qquad (6.4.4)$$

$$i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Введем ступенчатую аппроксимацию АПВ

$$w_k(x)\approx\pi(x)\frac{\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}w_k(x)dx}{\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\pi(x)dx}=\pi(x)\ \frac{w_k(i)}{w_0(i)},$$

$$\text{при } x^i\leqslant x\leqslant x^{i+1},\quad i=0,1,\ \ldots,\ m-1. \qquad (6.4.5)$$

При такой аппроксимации сохраняется общий вид апостериорного распределения: сохраняется истинной величина апостериорных вероятностей $w_k(i)$ попадания параметра x в интервалы $(x^i,\ x^{i+1})$, но изменяется вид плотности $w_k(x)$ в пределах этих интервалов. Погрешность, вносимая (5), тем меньше, чем мельче интервалы $(x^i,\ x^{i+1})$; при уменьшении длины интервалов $(m\longrightarrow\infty)$ ступенчатая аппроксимирующая кривая переходит в функцию $w_k(x)$.

Используя (5), получим из (4) приближенный рекуррентный алгоритм формирования апостериорных вероятностей

$$w_{k+1}(j)=\frac{\sum\limits_{i}\frac{w_k(i)}{w_0(i)}\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho\,[y_{k+1}-S\,(x_{k+1})\mid y_k-S\,(x_k)]\times}{\sum\limits_{i,\,j}\frac{w_k(i)}{w_0(i)}\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho\,[y_{k+1}-S(x_{k+1})\mid y_k-S\,(x_k)]\times}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\times\,\pi(x_{k+1}\mid x_k)\pi(x_k)dx_kdx_{k+1}}{\times\,\pi(x_{k+1}\mid x_k)\pi(x_k)dx_kdx_{k+1}}. \qquad (6.4.6)$$

При этом ОП (6.3.19) с учетом аппроксимации (5) приобретает вид

$$\Lambda_{k+1}=\frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)}\sum_{ij}\frac{w_k(i)}{w_0(i)}\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho\,[y_{k+1}-S_{k+1}\,(x_{k+1})\mid y_k-$$

$$-S_k\,(x_k)]\,\pi\,(x_{k+1}\mid x_k)\,\pi\,(x_k)\,dx_kdx_{k+1}. \qquad (6.4.7)$$

В целях упрощения обработки перейдем от апостериорных вероятностей $w_{k+1}(j)$ к ненормированным апостериорным «вероятностям»:

$$W_{k+1}(j)=w_{k+1}(j)\,\Lambda_{k+1}. \qquad (6.4.8)$$

Используя (6) — (8), получим

$$W_{k+1}(j)=\sum_i \frac{W_k(i)}{w_0(i)} \int\limits_{x^j}^{x^{j+1}} \int\limits_{x^i}^{x^{i+1}} \frac{\rho\,[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\mid y_k-S_k(x_k)]}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)} \times$$

$$\times\, \pi(x_{k+1}\mid x_k)\,\pi(x_k)\,dx_k dx_{k+1}, \qquad (6.4.9)$$

$$\Lambda_{k+1}=\sum_j W_{k+1}(j). \qquad (6.4.10)$$

Алгоритмы (9), (10) (как и (6), (7)) определяют структуру многоканальных приемников. Чтобы конкретизировать их схемы, необходимо задать распределение помехи $\rho(y_{k+1}|y_k)$. Однако, если рассмотреть случай слабых сигналов, то можно еще до конкретизации помехи получить ряд полезных результатов.

6.4.2. Слабый сигнал (общий случай). Разложим функцию $\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\,|\,y_k-S_k(x_k)]$ (см. (9)) в ряд Тейлора в окрестности точек y_{k+1}, y_k и отбросим члены порядка малости $O(s^2)$ (поступаем аналогично п. 6.3). В результате соотношение (9) упрощается:

$$W_{k+1}(j)=\sum_i [1+S_{k+1}(j)\,\varphi_1(y_k,\ y_{k+1})+S_k(i)\,\varphi_2(y_k,\ y_{k+1})]\,P_{ij}W_k(i). \quad (6.4.11)$$

Здесь

$$S_{k+1}(j)=\frac{\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}} S_{k+1}(x_{k+1})\pi(x_{k+1})dx_{k+1}}{\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}} \pi(x_{k+1})dx_{k+1}} \qquad (6.4.12)$$

— усредненное значение сигнала $S_k(x_{k+1})$ в пределах интервала (x^j, x^{j+1}), аналогично определяется $S_k(i)$; функции φ_1 и φ_2 определяются формулами (6.3.24);

$$P_{ij}=\frac{\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}} \pi(x_{k+1},\ x_k)dx_k dx_{k+1}}{\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}} \pi(x_k)dx_k}. \qquad (6.4.13)$$

$$(\pi(x_{k+1},\ x_k)=\pi(x_{k+1}\mid x_k)\,\pi(x_k))$$

— априорная вероятность перехода параметра x из интервала (x^i, x^{i+1}) на k-м шаге в интервал (x^j, x^{j+1}) на $(k+1)$-м шаге.

Соотношение (11) определяет структуру одного канала квазиоптимального m-канального приемника. Преобразования φ_1 и φ_2 осуществляются нелинейными инерционными устройствами. Конкретные законы этих преобразований зависят от распределения вероятностей помехи и вычисляются по формулам (6.3.24). Весовые коэффициенты P_{ij} реализуются при помощи блока сопротивлений. Опорные сигналы $S(j)$ рассчитываются априори в соответствии с (12). Это является следствием

приближения (5). Если же указанное приближение не использовать, а исходить строго из алгоритма (4), то придем к схеме с подстройкой опорных сигналов на каждом шаге в пределах (x^j, x^{j+1}) с учетом апостериорной информации. При небольшой длине подынтервалов осуществление такой подстройки не может сильно улучшить качество приема, однако значительно усложнит конструкцию приемной системы.

Рассматриваемая многоканальная система состоит из совокупности связанных между собой каналов. Суммируя напряжения на их выходе, получим статистику обнаружения (см. (10)), которую следует подать на пороговое устройство.

При $\theta=1$ напряжения на выходе каналов с точностью до некоторой постоянной определяют распределение апостериорных вероятностей наличия параметра сигнала в подынтервалах (x^j, x^{j+1}). Имея такое распределение, можно в соответствии с тем или иным критерием найти подынтервал, определяющий оценку неизвестного параметра. Например, для получения оценок в последовательные моменты времени по критерию максимума апостериорной вероятности выходные данные каналов $(W(j))$ нужно подавать при каждом шаге на схему выбора максимума.

Отметим, что структура синтезированной системы инвариантна относительно распределения сигнала: от него зависят лишь величины весовых коэффициентов и совокупность опорных сигналов $S(j)$.

Многоканальный приемник, определяемый (11), тем ближе к оптимальному, чем меньше длина подынтервалов (x^j, x^{j+1}), т. е. чем больше число каналов. Однако в реальной системе оно вовсе не должно быть очень большим. Число каналов определяется требуемой точностью оценивания и допустимой потерей качества обнаружения по сравнению с оптимальной системой. Приемлемое число каналов может быть выбрано в результате анализа синтезированного приемника. Такой анализ, иллюстрирующий влияние числа каналов на качество обнаружения, проведен для конкретного примера в п. 8.4.2.

Выше ничего не говорилось о том, каким образом нужно разбивать интервал (x^0, x^m) на подынтервалы, т. е. как выбирать точки $x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^{m-1}$. (Очевидно, что равномерное разбиение в общем случае не является наилучшим.) Оптимальное решение этой задачи (при заданном числе каналов) можно получить в результате соответствующего анализа многоканальной системы. Однако анализ подобных сложных алгоритмов удается осуществить лишь при помощи машинных методов для частных примеров. Аналитическую зависимость, определяющую качество работы многоканального приемника при различных способах разбиения интервала (x^0, x^m), получить не удается. Поэтому вопрос об оптимальном выборе точек x^j $(j=1, \ldots, m-1)$ остается открытым. Тем не менее можно предложить хороший, приемлемый на практике способ разбиения, учитывающий априорную информацию о параметре сигнала. Суть этого способа заключается в следующем. Точки x^j при фиксированном числе каналов находятся из условия равенства априорных вероятностей на всех подынтервалах:

$$\int_{x^j}^{x^{j+1}} \pi(x)\,dx = \int_{x^i}^{x^{i+1}} \pi(x)\,dx, \quad i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1. \tag{6.4.14}$$

Такой способ разбиения представляется целесообразным, поскольку он в соответствии с априорными сведениями увеличивает плотность каналов на участках более вероятных значений неизвестного параметра.

6.4.3. Частные задачи. Используя (11), можно непосредственно получать алгоритмы многоканальной обработки для различных частных задач. Например, если помеха гауссовская (см. (5.3.2)), то нелинейные преобразования φ_1, φ_2 (6.3.24) переходят в линейные, при этом

$$W_{k+1}(j) = \sum_i \left\{1 + \frac{(y_{k+1} - y_k R)[S_{k+1}(j) - S_k(i) R]}{\sigma_0^2 (1 - R^2)}\right\} P_{ij} W_k(i).$$

При негауссовской помехе с независимыми значениями соотношение (11) упрощается:

$$W_{k+1}(j) = [1 + S_{k+1}(j) f_1(y_{k+1})] \sum_i P_{ij} W_k(i). \qquad (6.4.15)$$

Нелинейное преобразование f_1 в данном случае осуществляется безынерционным устройством, характеристика которого определяется формулой (6.3.15).

Если параметр x — случайная величина (а не случайный процесс), то

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq 1. \end{cases} \qquad (6.4.16)$$

При этом алгоритм (11) принимает вид

$$W_{k+1}(j) = [1 + S_{k+1}(j) \varphi_1(y_k, y_{k+1}) + S_k(j) \varphi_2(y_k, y_{k+1})] W_k(j). \qquad (6.4.17)$$

Здесь, как видим, связь между каналами отсутствует. Таким образом, при приеме сигнала, параметр которого является случайной величиной (не изменяется на интервале наблюдения), многоканальная система состоит из совокупности не связанных между собой каналов.

Уже из результатов проведенного синтеза ясно, что пренебрежение связями между каналами (которое можно сделать для упрощения схемы) при приеме сигнала с флюктуирующим параметром приведет к потере качества работы системы. Величина потерь зависит от конкретных условий задачи; в частности, она определяется тем, как быстро изменяется (флюктуирует) параметр сигнала за время наблюдения (в п. 8.4.2 для конкретного примера находится величина указанных потерь).

Остановимся еще на одном частном случае. Если параметр сигнала — случайная величина, помеха — некоррелированная и гауссовская, то многоканальный приемник, как следует из (15), (16), (6.3.15), принимает наиболее простой вид: он состоит из набора обычных корреляторов, перекрывающих весь диапазон возможных значений параметра сигнала. Заметим, что на практике в основном применяются многоканальные схемы именно такого типа (корреляторы нередко заменяются согласованными фильтрами). Однако, как следует из вышеизложенного, эти схемы близки к оптимальной лишь в указанном частном случае.

6.4.4. Упрощение алгоритмов. Рассмотренную многоканальную процедуру обработки сигналов можно реализовать с помощью аналоговых или цифровых вычислительных машин. Однако для этого требуются устройства, способные оперировать с сигналами в большом динамическом диапазоне. Последнее создает существенное неудобство тем более, что динамический диапазон рабочих сигналов обычно экспоненциально растет с ростом отношения сигнал/шум. Предпочтительнее формировать вместо статистик $W_{k+1}(j)$ и Λ_{k+1} их логарифмы

$$\ln W_{k+1}(j) = z_{k+1}(j), \qquad \ln \Lambda_{k+1} = z_{k+1}. \qquad (6.4.18)$$

Кроме того, для упрощения обработки целесообразно использовать приближенный спо-

соб, связанный с учетом только максимального слагаемого в сумме. Но прежде чем о нем вести речь, преобразуем соотношение (9) следующим образом:

$$z_{k+1}(j)=\ln\sum_i \exp\left\{\ln\frac{\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\mid y_k-S_k(x_k)]}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\pi(x_{k+1},\ x_k)dx_{k+1}dx_k}\times\right.$$
$$\left.\times\pi(x_{k+1},\ x_k)\,dx_{k+1}dx_k+z_k(i)+\ln P_{ij}\right\}. \qquad (6.4.19)$$

По теореме о среднем

$$\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\rho\,[y_{k+1}-S_{k+1}(x_{k+1})\mid y_k-S_k(x_k)]\,\pi(x_{k+1},\ x_k)\,dx_kdx_{k+1}=$$
$$=\rho\,[y_{k+1}-S_{k+1}(x'_j)\mid y_k-S_k(x'_i)]\int\limits_{x^j}^{x^{j+1}}\int\limits_{x^i}^{x^{i+1}}\pi(x_{k+1},\ x_k)\,dx_kdx_{k+1}, \qquad (6.4.20)$$

где x'_j, x'_i — некоторые точки, принадлежащие подынтервалам $(x^j,\ x^{j+1})$ и $(x^i,\ x^{i+1})$ соответственно. В первом приближении можно положить $S(x'_j)=S(j)$, где $S(j)$ определяется согласно (12). Подставляя (20) в (19), получим

$$z_{k+1}(j)=\ln\sum_i \exp\left\{\ln\frac{\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x'_j)\mid y_k-S_k(x'_i)]}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)}+z_k(i)+\ln P_{ij}\right\}. \qquad (6.4.21)$$

Сумма по i в этом выражении состоит из неравноценных слагаемых. Неравноценность усиливается за счет экспоненциального преобразования. Поэтому можно предположить, что в указанной сумме практически приемлемо ограничиться максимальным слагаемым (особенно при небольшом их числе, т. е. при небольшом числе каналов). При этом вместо алгоритма (21) будем иметь

$$\tilde{z}_{k+1}(j)=\max_i\left\{\ln\frac{\rho[y_{k+1}-S_{k+1}(x'_j)\mid y_k-S_k(x'_i)]}{\rho(y_{k+1}\mid y_k)}+\tilde{z}_k(i)+\ln P_{ij}\right\}. \qquad (6.4.22)$$

Приближенный алгоритм (22) существенно проще (21). Аналогично можно поступить и при формировании ЛП

$$z_{k+1}=\ln\sum_j \exp\{z_{k+1}(j)\}, \qquad (6.4.23)$$

ограничившись максимальным слагаемым

$$\tilde{z}_{k+1}=\max_j\{\tilde{z}_{k+1}(j)\}. \qquad (6.4.24)$$

Отметим, что совокупность $z_k(j)$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$ характеризует распределение логарифма ненормированных апостериорных вероятностей. Чем больше отношение сигнал/шум, тем точнее фильтрация — у́же апостериорное распределение, и, следовательно, сильнее выражен преобладающий член в совокупности $z_k(j)$. Наличие такого слагаемого под знаком суммы в (23) позволяет с большим основанием перейти от (23) к приближенному алгоритму (24). Таким образом, упрощенная процедура (22), (24) тем ближе к исходной (21), (23), чем больше отношение сигнал/шум. В п. 8.4.2 на примере показано, что обе процедуры практически эквивалентны.

В случае слабых сигналов алгоритм (22) можно преобразовать аналогично тому, как это делалось в п. 6.4.2. Однако мы останавливаться на этом не будем, а обратимся к следующей задаче.

Рассмотрим, во что переходит алгоритм (22) в случае некоррелированного гауссовского шума. Конкретизируя (22) с учетом $\rho(y_{k+1}|y_k)=\rho(y_{k+1})$ и (4.3.4), получим

$$\widetilde{z}_{k+1}(j)=\frac{1}{\sigma^2_0}S_{k+1}(x'_j)\,y_{k+1}+\max_i\{\widetilde{z}_k(i)+\ln P_{ij}\}. \qquad (6.4.25)$$

Практическое осуществление схемы приемника согласно алгоритму (25), (24) особых трудностей не представляет. Сигналы $\tilde{z}_k(i)$ на выходе всех каналов запоминаются на один шаг. На каждом следующем шаге совокупность $\tilde{z}_k(i)$ смещается на $\ln P_{ij}$, затем в схеме выбора максимума отбирается наибольшая величина. Последняя складывается с результатом умножения наблюдаемого колебания на соответствующее опорное. Максимальная величина из совокупности $z_n(i)$ представляет собой статистику обнаружения, которая подается на пороговое устройство. При $\theta=1$ по номеру канала с максимальным выходным сигналом оценивается значение параметра x на соответствующем шаге.

Заметим, что если параметр сигнала является случайной величиной, помеха — некоррелированная и гауссовская, то уже из (21) (т. е. до упрощения) с учетом (4.3.4), (16) получаем

$$z_{k+1}(j)=\frac{1}{\sigma^2_0}S_{k+1}(x'_j)\,y_{k+1}+z_k(j) \qquad (6.4.26)$$

или в нерекуррентной форме

$$z_n(j)=\frac{1}{\sigma^2_0}\sum_{k=1}^{n}S_k(x'_j)\,y_k,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Как видим, в данном случае многоканальная система состоит из набора несвязанных между собой корреляционных приемников, настроенных на сигналы $S_k(x'_j)$ (аналогичный факт уже отмечался и при рассмотрении слабых сигналов в п. 6.4.3). Если же параметр x флюктуирует за время наблюдения, то требуется более сложная обработка, учитывающая связи между каналами. Приближенный вариант такой обработки определяется алгоритмом (25).

Глава 7

СИНТЕЗ СИСТЕМ ОБНАРУЖЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ ОБЩИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В настоящей главе синтезируются алгоритмы обнаружения и фильтрации для общего случая, когда предположения о гауссовском или марковском характере сигналов (и помех) не являются обязательными. Рассматриваемые в § 7.1 и 7.2 сигнал и помеха представляют собой произвольные стохастические процессы в том смысле, что накладываемые на них ограничения настолько слабы, что по существу не являются ограничениями для реальных процессов *).

В целях наибольшего приближения постановки задачи к практической ситуации предполагается, что на полезный сигнал, кроме поме-

*) Впоследствии при рассмотрении задач синтеза термин «произвольный» процесс приобретет более конкретное содержание.

хи, воздействует шум с независимыми значениями (например, собственный шум приемника).

Выводимые в § 7.1, 7.2 алгоритмы составляют сущность оценочно-корреляционного принципа обнаружения сигналов на фоне помех [99]. В гл. 4—6 нам неоднократно приходилось сталкиваться с построением обнаружителей для различных моделей сигналов в виде схем оценочно-корреляционного типа. И это не случайно. Здесь будет показано, что оценочно-корреляционные алгоритмы обнаружения носят универсальный характер, причем сделано это будет различными методами. Каждый из рассматриваемых ниже методов доказательства связан с определенными ограничениями на сигнал и помеху, однако все они (ограничения) являются несущественными с точки зрения практики.

В § 7.2, кроме общих стохастических моделей, рассматриваются также детерминированные и квазидетерминированные сигналы.

Параграф 7.3 посвящен оптимальной нелинейной фильтрации стохастического сигнала, параметром которого является квазимартингал.

7.1. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

7.1.1. Метод марковской аппроксимации [99, 100]. Вначале рассмотрим случай, когда в качестве мешающего процесса выступает только белый гауссовский шум ξ_t (собственно помеха отсутствует), статистически не зависящий от сигнала.

а) Пусть $\{x^*_t\}$ — произвольный случайный процесс, на который наложено лишь одно ограничение. Предполагается существование некоторого многомерного марковского диффузионного процесса $\{\mathbf{x}_t\}=\{x_t, x_{1t}, \ldots, x_{m-1,t}\}$, компонента которого, например x_t, аппроксимирует процесс x^*_t с какой угодно степенью точности. Поскольку практически любой случайный процесс можно с необходимой степенью точности заменить компонентой специально сконструированного многомерного марковского процесса (см. п. 1.5.4), то введенное ограничение на процесс $\{x^*_t\}$ является весьма слабым.

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала $S(x^*_t, t)$ на фоне аддитивного белого шума ξ_t $[M\xi_t\xi_{t+\tau}=N\delta(\tau)]$, статистически не зависящего от сигнала. Функция S известна, в частном случае полезный сигнал есть исходный произвольный процесс: $S(x^*_t, t)=x^*_t$.

Заменяя исходный процесс x^*_t компонентой x_t указанного многомерного марковского процесса $\{\mathbf{x}_t\}$, сведем поставленную задачу обнаружения (с любой степенью точности) к задаче обнаружения сигнала $S(x_t, t)$ по наблюдаемым данным

$$y_t=\theta S(x_t, t)+\xi_t, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad \theta=0, 1. \tag{7.1.1}$$

Здесь полезный сигнал есть функция одной компоненты x_t многомерного марковского процесса $\{\mathbf{x}_t\}=\{x_t, x_{1t}, \ldots, x_{m-1,t}\}$; компоненты $\{x_{1t}, \ldots, x_{m-1,t}\}$ в (1) не входят. Отметим, что для доказательства общности оценочно-корреляционных алгоритмов нам не нужно конструировать аппроксимирующий марковский процесс $\{\mathbf{x}_t\}$. Вполне достаточно факта его существования.

После указанной модификации исходной задачи можно воспользоваться результатами п. 5.2.3, где рассматривались вопросы обнаружения и фильтрации сигналов, являющихся функциями части компонент

многомерных марковских процессов. Применяя эти результаты к задаче (1), получим соотношения для ЛП z_T в форме Ито:

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T \widehat{S}_t y_t d^*t - \frac{1}{2N}\int_0^T \widehat{S}_t^2\, dt \tag{7.1.2}$$

и в симметризованной форме:

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T \widehat{S}_t y_t dt - \frac{1}{2N}\int_0^T \widehat{S_t^2}\, dt, \tag{7.1.3}$$

где

$$\widehat{S}_t = M[S(x_t, t)\,|\,y_0^t, \quad \theta=1], \tag{7.1.4}$$

$$\widehat{S_t^2} = M[S^2(x_t, t)\,|\,y_0^t, \quad \theta=1]. \tag{7.1.5}$$

Апостериорные математические ожидания (4), (5) есть БСО сигналов $S(x_t, t)$ и $S^2(x_t, t)$ соответственно при $\theta=1$. Если же $\theta=0$, то функционалы $\widehat{S_t}$ и $\widehat{S_t^2}$, входящие в (2), (3), являются псевдооценками.

Отметим, что при записи алгоритмов (2) и(3) не потребовались конкретные статистические сведения о процессе $\{\mathbf{x}_t\}$. При этом проявляется важное свойство указанных алгоритмов: их инвариантность относительно конструкции аппроксимирующего процесса $\{\mathbf{x}_t\}$ — вида коэффициентов переноса и диффузии и числа компонент. Какова бы ни была эта конструкция, вид формул (2), (3) и смысл входящих в них оценок $\widehat{S}_t$, $\widehat{S_t^2}$, обеспечивающих минимум среднеквадратической ошибки, остаются одними и теми же. Структура алгоритмов и смысл оценок не меняются и при $m \longrightarrow \infty$.

Из указанной инвариантности и возможности замены произвольного сигнала компонентой марковского процесса непосредственно следует общность оценочно-корреляционных алгоритмов обнаружения (2), (3).

Необходимо подчеркнуть, что указанная инвариантность алгоритмов (2), (3) касается только их структуры и смысла оценок. Конкретный же вид оценок свойством инвариантности относительно статистических характеристик сигнала не обладает. Сравнивая, например (2) с (4.2.16) и (3) с (4.2.12), видим, что структура обнаружителей для разных задач ((1) и (4.2.1)) одна и та же. Одинаков и смысл среднеквадратических оценок (4), (5) и (4.2.3), (4.2.10); однако их конкретный вид будет различным, так как апостериорная плотность вероятностей параметра сигнала, входящая, например в (4.2.4), не равна апостериорной плотности, используемой при вычислении (4). Наглядной иллюстрацией этого обстоятельства служат примеры, рассмотренные в предыдущих главах.

В том частном случае, когда сигнал является детерминированным ($S(x_t, t) = S(t)$), имеем $\widehat{S_t} = S(t)$, $\widehat{S}_t^2 = \widehat{S_t^2}$, при этом оценочно- корреляционные алгоритмы (2), (3) переходят в корреляционный (4.2.19).

б) Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть на полезный сигнал воздействует неаддитивная и статистически зависящая от сиг-

нала помеха и, кроме того, не зависящий от них аддитивный белый шум. Комбинацию сигнала и помехи запишем в виде заданной функции $\Phi(x^*_t, \eta^*_t, t)$ произвольных случайных процессов $\{x^*_t\}$, $\{\eta^*_t\}$. При аддитивной помехе $V(\eta^*_t, t)$ эта функция $\Phi=S(x^*_t, t)+V(\eta^*_t, t)$. На процессы $\{x^*_t\}$ и $\{\eta^*_t\}$ наложено аналогично предыдущему непринципиальное ограничение: допускается возможность их аппроксимации со сколь угодно высокой степенью точности компонентами некоторых многомерных марковских диффузионных процессов. В результате задача обнаружения произвольного сигнала на фоне произвольной помехи и аддитивного белого шума сводится к задаче:

$$y_t=\begin{cases}\Phi(x_t, \eta_t, t)+\xi_t, & \theta=1,\\ V(\eta_t, t)+\xi_t, & \theta=0,\end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7.1.6}$$

где x_t, η_t — компоненты некоторого многомерного диффузионного процесса $\{\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\eta}_t\}$, остальные компоненты которого в y_t не входят. Отметим, что аппроксимирующие марковские процессы в случае зависимой и независимой (от сигнала) помехи отличаются друг от друга, однако на общей структуре получаемых алгоритмов обнаружения это не скажется, как не повлияет на нее вид коэффициентов переноса и диффузии и число компонент процесса $\{\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\eta}_t\}$.

Непосредственно используя результаты п. 5.2.3 (формулы (5.2.27), (5.2.23)), получаем выражение для ЛП в форме Ито:

$$z_T=\frac{1}{N}\int\limits_0^T(\widehat{\Phi}_t-\widehat{V}_{0t})\,y_t d^*t-\frac{1}{2N}\int\limits_0^T(\widehat{\Phi}_t^2-\widehat{V}_t^2)\,dt, \tag{7.1.7}$$

и в симметризованной форме:

$$z_T=\frac{1}{N}\int\limits_0^T(\widehat{\Phi}_t-\widehat{V}_{0t})\,y_t dt-\frac{1}{2N}\int\limits_0^T(\widehat{\Phi_t^2}-\widehat{V_{0t}^2})\,dt, \tag{7.1.8}$$

где

$$\widehat{\Phi}_t=M[\Phi(x_t, \eta_t, t)\,|\,y_0{}^t, \theta=1],$$
$$\widehat{V}_{0t}=M[V(\eta_t, t)\,|\,y_0{}^t, \theta=0]; \tag{7.1.9}$$

$$\widehat{\Phi_t^2}=M[\Phi^2(x_t, \eta_t, t)\,|\,y_0{}^t, \theta=1],$$
$$\widehat{V_{0t}^2}=M[V^2(\eta_t, t)\,|\,y_0{}^t, \theta=0]. \tag{7.1.10}$$

Алгоритмы (7), (8) дают структуру оптимальных обнаружителей произвольных сигналов на фоне произвольных помех при наличии аддитивного белого шума. Общность этих алгоритмов является следствием их инвариантности относительно конструкции марковских процессов и аппроксимирующих свойств последних (как и в предыдущей задаче).

В случае аддитивной помехи, когда $\Phi(x_t, \eta_t, t) = S(x_t, t) + V(\eta_t, t)$, формулы (7), (8) принимают вид

$$z_T = \frac{1}{N}\int\limits_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, y_t d^*t - \frac{1}{2N}\int\limits_0^T (\hat{S}_t^2 + 2\hat{S}_t\hat{V}_{1t} + \hat{V}_{1t}^2 - \hat{V}_{0t}^2)\, dt, \qquad (7.1.11)$$

$$z_T = \frac{1}{N}\int\limits_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, y_t dt - \frac{1}{2N}\int\limits_0^T (\widehat{S_t^2} + 2\widehat{S_t V_t} + \widehat{V_{1t}^2} - \widehat{V_{0t}^2})\, dt, \qquad (7.1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_t &= M[S(x_t, t) \mid y_0^t,\ \theta = 1], \\ \hat{V}_{1t} &= M[V(\eta_t, t) \mid y_0^t,\ \theta = 1], \\ \widehat{S_t V_t} &= M[S(x_t, t) V(\eta_t, t) \mid y_0^t,\ \theta = 1], \\ \widehat{V_{1t}^2} &= M[V^2(\eta_t, t) \mid y_0^t,\ \theta = 1], \end{aligned} \qquad (7.1.13)$$

а $\hat{V}_{0t}$ и $\widehat{V_{0t}^2}$ определяются соотношениями (9), (10).

Апостериорные математические ожидания (9), (10), (13) случайных функций $\Phi(x_t, \eta_t, t)$, $S(x_t, t)$, $V(\eta_t, t)$ являются их оценками по минимуму среднеквадратической ошибки, получающимися в результате наблюдения реализаций y_0^t при $\theta=1$ и $\theta=0$ соответственно. Отметим, что в алгоритмы (7), (8), (11), (12) при любой из ситуаций ($\theta=0,1$) входят как оценки, так и псевдооценки (в отличие от алгоритмов (2), (3)). Так, например, если имеет место $\theta=0$, то функционалы $\hat{S}_t$, $\hat{V}_{1t}$ в (11), (12) будут псевдооценками сигнала и помехи соответственно, а $\hat{V}_{0t}$ будет оценкой помехи, при $\theta=1$ псевдооценки перейдут в оценки, и наоборот.

Согласно алгоритмам (7), (8), (11), (12) схемы оптимальных обнаружителей являются двухканальными ($\theta=0$ и $\theta=1$), при этом в каждом из каналов осуществляется оценивание (фильтрация) помехи, которая затем компенсируется при помощи вычитания: $\hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t}$. Эти алгоритмы определяют оценочно-корреляционно-компенсационный метод обработки сигналов на фоне помех.

Если помеха отсутствует ($V(\eta_t, t) \equiv 0$), то

$$\hat{V}_{0t} = \hat{V}_{1t} = \widehat{V_{1t}^2} = \hat{V}_{0t}^2 = \widehat{S_t V_t} = 0,$$

и оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы (11), (12) переходят в оценочно-корреляционные (2), (3).

7.1.2. Прямой метод [103]. Рассмотрим теперь задачу обнаружения в дискретном и непрерывном времени, не обращаясь к марковской аппроксимации сигналов и помех. Пусть наблюдается

$$y_k = \theta S(x_k, t_k) + \eta_k + \xi_k;\quad \theta = 0,\ 1;\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad (7.1.14)$$

где параметр x_k сигнала $S(x_k, t_k)$ и помеха η_k — произвольные немарковские случайные процессы с дискретным временем, статистически зависимые между собой. Шум ξ_k представляет собой случайный процесс с независимыми значениями, описываемый плотностью вероятностей $\rho(\xi_k)$. Предполагается, что процессы $\{x_k\}$, $\{\eta_k\}$ статистически не зависят от «будущего» шума $\{\xi_k\}$, т. е. случайные величины x_i и η_i не зависят от ξ_k при $i<k$.

Найдем ОП $\Lambda_n = p(y_0^n|\theta=1)/p(y_0^n|\theta=0)$. Для этого введем условные плотности вероятностей $p(y_k|y_0^{k-1}, \theta)$ $(k=1, \ldots, n)$. Тогда ОП можно записать в виде

$$\Lambda_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} p(y_k|y_0^{k-1}, \theta=1)}{\prod_{k=1}^{n} p(y_k|y_0^{k-1}, \theta=0)} \frac{p(y_0|\theta=1)}{p(y_0|\theta=0)}. \qquad (7.1.15)$$

Поскольку $\{\xi_k\}$ — процесс с независимыми значениями, и, кроме того, статистически не зависит от «прошлого» процессов $\{x_k\}$ и $\{\eta_k\}$, то при фиксированных x_k и η_k имеем

$$p(y_k|x_k, \eta_k, y_0^{k-1}, \theta=1) = p(y_k|x_k, \eta_k, \theta=1). \qquad (7.1.16)$$

Очевидно, что для решаемой задачи

$$p(y_k|x_k, \eta_k, \theta=1) = \rho[y_k - S(x_k, t_k) - \eta_k]. \qquad (7.1.17)$$

Введем АПВ параметра сигнала и помехи $p(x_k, \eta_k|y_0^{k-1}, \theta=1)$. Используя (16), (17), получим

$$p(y_k|y_0^{k-1}, \theta=1) =$$
$$= \iint \rho[y_k - S(x_k, t_k) - \eta_k] p(x_k, \eta_k|y_0^{k-1}, \theta=1)\, dx_k d\eta_k. \qquad (7.1.18)$$

Аналогичным образом можно представить и $p(y_k|y_0^{k-1}, \theta=0)$.
В результате получим следующее выражение для ОП (15):

$$\Lambda_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} \iint \rho[y_k - S(x_k, t_k) - \eta_k] p(x_k, \eta_k|y_0^{k-1}, \theta=1) dx_k d\eta_k}{\prod_{k=1}^{n} \int \rho(y_k - \eta_k) p(\eta_k|y_0^{k-1}, \theta=0) d\eta_k} \frac{p(y_0|\theta=1)}{p(y_0|\theta=0)}. \qquad (7.1.19)$$

При этом рекуррентный алгоритм формирования ОП примет вид

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \frac{M_1 \rho[y_k - S(x_k, t_k) - \eta_k]}{M_0 \rho[y_k - \eta_k]}, \qquad (7.1.20)$$

где M_0 и M_1 — апостериорные математические ожидания:

$$M_\theta(\cdot) = \begin{cases} \iint (\cdot)\, p(x_k, \eta_k|y_0^{k-1}, \theta=1)\, dx_k d\eta_k, \\ \int (\cdot)\, p(\eta_k|y_0^{k-1}, \theta=0)\, d\eta_k. \end{cases} \qquad (7.1.21)$$

Отметим, что при выводе (19), (20) практически никаких ограничений на параметр сигнала x и помеху η вводить не понадобилось. Требуется лишь существование условных (апостериорных) математических ожиданий, входящих в (19), (20). Однако условное математическое ожидание произвольной случайной величины существует всегда, если существует математическое ожидание этой величины (см. (1.1.27)). Для исследуемых здесь задач это приводит к несущественному с точки зрения практики требованию

$$M\varphi_1(x_k, \eta_k) < \infty, \quad M\varphi_0(\eta_k) < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\varphi_\theta = \rho\,[y_k - \theta S(x_k, t_k) - \eta_k], \quad (\theta = 0, 1).$$

Рассмотрим теперь случай непрерывного времени. После перехода к непрерывному времени наблюдаемый процесс (14) примет вид

$$y_t = \theta S(x_t, t) + \eta_t + \xi_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7.1.22}$$

Как и при дискретном времени, на параметр сигнала x_t и помеху η_t никаких особых ограничений не накладывается. Они могут быть немарковскими и негауссовскими, причем статистически зависимыми между собой. В качестве шума ξ_t здесь рассматривается белый гауссовский (см. п. 4.2.1) шум, имеющий спектральную плотность N. Предполагается также, что процессы $\{x_t\}$ и $\{\eta_t\}$ являются неупреждающими по отношению к винеровскому процессу $\omega_t = \int\limits_0^t \xi_\tau d\tau$ (т. е. сигнал и помеха статистически не зависят от «будущего» шума). Следует только отметить, что последнее предположение остается здесь в силе лишь в том случае, если рассматриваются стохастические уравнения в форме Ито.

Подставляя (4.2.2) в (20) и осуществляя предельный переход аналогично п. 4.2.2. и п. 5.2.1, получим соотношение для ЛП (в форме Ито):

$$z_T = \frac{1}{N}\int\limits_0^T (\widehat{S}_t + \widehat{\eta}_{1t} - \widehat{\eta}_{0t})\, y_t d^*t - \frac{1}{2N}\int\limits_0^T (\widehat{S}_t^2 + 2\widehat{S}_t\widehat{\eta}_{1t} + \widehat{\eta}_{1t}^2 - \widehat{\eta}_{0t}^2)\, dt, \tag{7.1.23}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{S}_t &= M\,[S(x_t, t)\,|\,y_0^t,\ \theta = 1], \\ \widehat{\eta}_{it} &= M\,[\eta_t\,|\,y_0^t,\ \theta = i], \quad i = 0, 1. \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

Симметризованное уравнение также получим методом п. 4.2.2, 5.2.1, при котором отбрасываются члены типа $(\Delta y)^2$. Однако такой метод не позволяет учесть зависимость шума (даже частичную) от сигнала и помехи. Поэтому здесь введем более сильное ограничение на шум ξ_t: считаем, что шум $\{\xi_t\}$ статистически не зависит от $\{x_t\}$ и $\{\eta_t\}$. Тогда, переходя в (20) к непрерывному времени, получим

$$z_T = \frac{1}{N}\int\limits_0^T (\widehat{S}_t + \widehat{\eta}_{1t} - \widehat{\eta}_{0t})\, y_t dt - \frac{1}{2N}\int\limits_0^T (\widehat{S_t^2} + \widehat{2S_t\eta_t} + \widehat{\eta_{1t}^2} - \widehat{\eta_{0t}^2})\, dt, \tag{7.1.25}$$

где

$$\widehat{S_t^2}=M[S^2(x_t,\ t)\,|\,y_0^t,\ \theta=1],$$
$$\widehat{S_t\eta_t}=M[S(x_t,\ t)\,\eta_t\,|\,y_0{}^t,\ \theta=1],\qquad(7.1.26)$$
$$\widehat{\eta_{it}^2}=M[\eta_t{}^2\,|\,y_0^t,\ \theta=i],\quad i=0,\ 1.$$

Полученные прямым способом оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы (23), (25) совпадают с алгоритмами (11), (12), выведенными с использованием марковской аппроксимации.

Формулу (23) можно записать по-другому. Для этого выделим в подынтегральном выражении второго интеграла (23) полный квадрат $(\widehat{S}_t+\widehat{\eta}_{1t}-\widehat{\eta}_{0t})^2$, а оставшиеся члены включим в стохастический интеграл. В результате получим

$$z_T=\frac{1}{N}\int\limits_0^T(\widehat{S}_t+\widehat{\eta}_{1t}-\widehat{\eta}_{0t})\,\widetilde{y}_t d^*t-\frac{1}{2N}\int\limits_0^T(\widehat{S}_t+\widehat{\eta}_{1t}-\widehat{\eta}_{0t})^2\,dt,\qquad(7.1.27)$$

где

$$\widetilde{y}_t=y_t-\widehat{\eta}_{0t}.\qquad(7.1.28)$$

Выясним, что собой представляет процесс $\{\widetilde{y}_t\}$ при $\theta=0$. В этом случае $y_t=\eta_t+\xi_t$. Согласно п. 1.4.4 (см. 1.4.23)

$$y_t=\widehat{\eta}_{0t}+\widetilde{\xi}_t,\qquad(7.1.29)$$

где $\widehat{\eta}_{0t}$ имеет прежний смысл (24), а $\widetilde{\xi}_t$—производная винеровского процесса $\sqrt{N}\widetilde{\omega}(t)$ [$\widetilde{\omega}(t)$ — стандартный винеровский процесс], т. е. $\widetilde{\xi}_t$ — белый гауссовский шум со спектральной плотностью N. Подставляя (29) в (28), видим, что процесс $\{\widetilde{y}_t\}$ является белым гауссовским шумом.

Таким образом, одна из операций рассматриваемой оценочно-корреляционно-компенсационной обработки произвольных сигналов на фоне произвольных помех сводится к обелению последних. Делается это при помощи обеляющего фильтра (28), непосредственно входящего в алгоритм (27). Так как процедуры (23) и (27) эквивалентны, то обеление помехи осуществляется и при обработке сигналов согласно алгоритму (23), хотя обеляющий фильтр (28) в явном виде в (23) не входит.

7.1.3. Метод порождающего процесса. О методе порождающего процесса в задачах обнаружения уже упоминалось в п. 5.3.1. Кроме того, этот метод применялся в предыдущем пункте при исследовании процесса (28). Во всех этих случаях метод порождающего процесса использовался лишь для выяснения свойств одного из блоков синтезированных обнаружителей (который оказался обеляющим фильтром), а сам синтез осуществлялся иными методами. Здесь же метод порождающего процесса (минимальное представление процесса Ито) будет использован уже на этапе синтеза системы обнаружения [105].

Пусть наблюдается случайный процесс

$$y_t=\theta S(x_t,\ t)+V(\eta_t,\ t)+\xi_t;\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \theta=0,\ 1,\qquad(7.1.30)$$

где S, V — детерминированные функции (в частном случае $S(x_t, t)=x_t$, $V(\eta_t, t)=\eta_t$); x_t, η_t — произвольные, в общем случае немарковские процессы; ξ_t — белый шум со спектральной плотностью N, не зависящий от прошлого процессов x_t и η_t.

На сигнал $S(x_t, t)$ и помеху $V(\eta_t, t)$ накладываются следующие ограничения:

$$P\left(\int_0^t |S(x_\tau, \tau)|\,d\tau < \infty, \quad \int_0^t |V(\eta_\tau, \tau)|\,d\tau < \infty\right) = 1, \tag{7.1.31}$$

$$\mathrm{M}|S(x_t, t)| < \infty, \ \mathrm{M}|V(\eta_t, t)| < \infty, \tag{7.1.32}$$

$$\int_0^t \mathrm{M}|S(x_\tau, \tau)+V(\eta_\tau, \tau)|^2 d\tau < \infty \tag{7.1.33}$$

для всех $t \in [0, T]$. Очевидно, что эти ограничения для практических задач несущественны, они всегда выполняются для любых реальных сигналов и помех.

Для удобства применения аппарата стохастических дифференциальных уравнений перейдем от наблюдаемых данных (30) к процессу $\overline{y_t} = \int_0^t y_\tau d\tau$, который согласно (31) является процессом Ито (см. п. 1.4.2) и допускает стохастический дифференциал

$$d^*\overline{y}_t = \theta S(x_t, t)\,dt + V(\eta_t, t)\,dt + \sqrt{N}d\omega_t, \tag{7.1.34}$$

где ω_t — стандартный винеровский процесс. В силу условий (32), (33) (ср. с (1.4.22)) процесс Ито $\{\overline{y}_t\}$ обладает минимальным представлением, т. е.

$$d^*\overline{y}_t = \theta\widehat{S}_t dt + \widehat{V}_{\theta t} dt + \sqrt{N}d\widetilde{\omega}_t, \tag{7.1.35}$$

где по-прежнему

$$\widehat{S}_t = \mathrm{M}[S(x_t, t)\,|\,y_0^t, \ \theta=1], \quad \widehat{V}_{\theta t} = \mathrm{M}[V(\eta_t, t)\,|\,y_0^t, \ \theta], \quad \theta = 0, \ 1,$$

а $\widetilde{\omega}_t$ — стандартный винеровский процесс, статистически не отличимый от ω_t (процесс $\widetilde{\omega}_t$ называют также порождающим).

Перейдем теперь к новому наблюдаемому процессу $\{\overline{\overline{y}}_t\}$, определяемому уравнением

$$d^*\overline{\overline{y}}_t = d^*\overline{y}_t - \widehat{V}_{0t}dt. \tag{7.1.36}$$

При $\theta=0$ согласно (35) имеем

$$d^*\overline{\overline{y}}_t = \sqrt{N}d\widetilde{\omega}_t, \tag{7.1.37}$$

а при $\theta=1$

$$d^*\overline{\overline{y}}_t = (\widehat{S}_t + \widehat{V}_{1t} - \widehat{V}_{0t})\,dt + \sqrt{N}d\widetilde{\omega}_t. \tag{7.1.38}$$

Объединяя (37) и (38), получаем

$$d^*\overline{\overline{y}} = \theta(\widehat{S}_t + \widehat{V}_{1t} - \widehat{V}_{0t})\,dt + \sqrt{N}d\widetilde{\omega}_t, \quad \theta = 0, \ 1. \tag{7.1.39}$$

В результате пришли к задаче, когда наблюдаемый процесс $\overline{\overline{y}}_t$ является процессом диффузионного типа (см. п. 1.4.2), а обнаружение «сигнала» $(\widehat{S}_t + \widehat{V}_{1t} - \widehat{V}_{0t})$ ведется на фоне только белого шума.

Теперь воспользуемся результатами теории абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской. Поскольку условие (33) обеспечивает на отрезке $[0, T]$ абсолютную непрерывность меры $\mu_{\tilde{\bar{y}}}$ соответствующей процессу (39) при $\theta=1$, относительно винеровской меры $\mu_{\tilde{\omega}}$, соответствующей процессу (39) при $\theta=0$, то, используя, например, [68], можно записать ОП (производную Радона — Никодима) для проблемы (39) в виде

$$\Lambda_T = \frac{d\mu_{\tilde{\bar{y}}}}{d\mu_{\tilde{\omega}}} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{N}\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t}) d^*\tilde{\bar{y}}_t - \frac{1}{2N}\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})^2\, dt\right\}, \qquad (7.1.40)$$

где стохастический интеграл понимается в смысле Ито. Определяется он следующим образом:

$$\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\tilde{\bar{y}}_t =$$

$$= \sqrt{N}\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\tilde{\omega}_t + \theta\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})^2\, dt, \qquad (7.1.41)$$

где первый интеграл в правой части есть стохастический интеграл Ито (см. п. 1.4.1), а второй — обычный (интеграл Стильтьеса). Существование интеграла в смысле Ито обеспечивается выполнением условий (32), (33).

Данное определение стохастического интеграла (41) связано при $\theta=1$ с двумя различными интегралами. Существует и другой способ определения интеграла (41), более удобный с вычислительной точки зрения, когда интеграл определяется непосредственно по процессу $\tilde{\bar{y}}$. А именно, пусть $f_t^{(n)}$ — последовательность ступенчатых функций, аппроксимирующих процесс $f_t = \hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t}$ таким образом, что

$$\int_0^T (f_t^{(n)} - f_t)^2 (|f_t|\,\theta + N)\, dt \xrightarrow[n]{P} 0, \quad \theta = 0,\ 1.$$

Для выполнения указанной сходимости достаточно, чтобы соблюдалось соотношение

$$P\left\{\int_0^T f_t^2 (|f_t|\,\theta + N)\, dt < \infty\right\} = 1, \qquad \theta = 0,\ 1.$$

Последнее гарантировано условиями (31), (32). Тогда стохастический интеграл $\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\tilde{\bar{y}}_t$ можно определить как предел сумм вида

$$\sum_{k=1}^{k_n} f_{t_k}^{(n)} (\tilde{\bar{y}}_{t_{k+1}} - \tilde{\bar{y}}_{t_k}),$$

где $\tilde{\bar{y}}_{t_k}$ — отсчеты процесса $\tilde{\bar{y}}_t$, взятые на отрезке $[0, T]$ и соответствующие выбранной аппроксимирующей функции $f_t^{(n)}$, $n=1, 2, \ldots$

Заметим, что соотношение (40) можно получить, хотя и не строго, исходя из физической интерпретации наблюдаемого процесса (39). Из (39) видно, что сигнал $(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})$, подлежащий обнаружению, можно вычислить по известной реализации наблюдаемого процесса $y^t{}_0$, т. е. его можно считать условно известным. Поэтому, подставив его в выражение для ОП в случае наблюдения известного сигнала на фоне белого гауссовского шума, придем к соотношению (40).

Формула (40) дает алгоритм оптимального обнаружения как в условиях (39), так и в условиях (30) и (34), поскольку проблема проверки гипотез (30), (34) эквивалентна проверке гипотез в условиях (39).

Действительно, обозначим через $\mu_{\bar{y}1}$ и $\mu_{\bar{y}0}$ меры, отвечающие на отрезке [0, T] процессу (34) (и следовательнно (35)) при $\vartheta=1$ и 0 соответственно. Заметим, что мера $\mu_{\tilde{\bar{y}}}$ получена из меры $\mu_{\bar{y}}$ линейным сдвигом на величину $H_T = \int\limits_0^T \hat{V}_{0t} dt$, а мера $\mu_{\tilde{\omega}}$ — из меры $\mu_{\bar{y}0}$ тем же самым сдвигом. Последний не нарушает абсолютной непрерывности мер (в силу ограниченной энергии сдвига, что следует из условия (33) и поэтому является допустимым [32, т. I]. При этом преобразованные меры однозначно связаны с исходными соотношениями

$$\mu_{\tilde{\bar{y}}}(\vartheta) = \mu_{\bar{y}1}(\vartheta + H_T), \quad \mu_{\tilde{\omega}}(\vartheta) = \mu_{\bar{y}0}(\vartheta + H_T), \tag{7.1.42}$$

где ϑ — функция, которая при вычислении (40) заменяется на $\tilde{\bar{y}}_t$. Учитывая (42), ОП для проблемы (39) можно привести к виду

$$\Lambda_T(\vartheta) = \frac{d\mu_{\tilde{\bar{y}}}}{d\mu_{\tilde{\omega}}}(\vartheta) = \frac{d\mu_{\bar{y}1}}{d\mu_{\bar{y}0}}(\vartheta + H_T) = \Lambda_T^{(\prime)}(\vartheta + H_T),$$

где $\Lambda_T^{(\prime)} = \frac{d\mu_{\bar{y}1}}{d\mu_{\bar{y}0}}$ — ОП для проблемы (34). Так как из равенства $\vartheta = \tilde{\bar{y}}_t$ следует $\vartheta + H_T = \bar{y}_T$, то

$$\Lambda_T(\tilde{\bar{y}}_T) = \Lambda_T^{(\prime)}(\bar{y}_T),$$

что и доказывает возможность перехода от (34) к (39).

Алгоритм (40) эквивалентен прежним оценочно-корреляционно-компенсационным алгоритмам обнаружения. Действительно, переходя к $z_T = \ln \Lambda_T$ и используя ранее введенное обозначение $d^*\tilde{\bar{y}} = \tilde{\bar{y}}_t d^*t$, из (40) получаем формулу

$$z_T = \frac{1}{N}\int\limits_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\,\tilde{\bar{y}}_t d^*t - \frac{1}{2N}\int\limits_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})^2\,dt, \tag{7.1.43}$$

совпадающую с (27). Подставляя (36)в (40), придем к формуле, совпадающей с (23), (11).

7.1.4. Переход к симметризованным алгоритмам с использованием формулы связи стохастических интегралов. Приведенные выше симметризованные уравнения для ЛП получены путем предельного перехода в рекуррентных алгоритмах к непрерывному времени при отбрасывании членов типа $(\Delta y)^2$. Здесь будет рассмотрен более общий метод получения симметризованных уравнений, непосредственно основывающийся на формуле перехода от стохастического интеграла Ито к симметризованному (см. п. 1.5.3). Проиллюстрируем этот метод на примере алгоритма (40) [105].

Прежде чем переходить от уравнения (40) к симметризованному, перепишем (40) в дифференциальной форме (используя формулу Ито (1.4.20)):

$$d^*\Lambda_t = \frac{1}{N}\Lambda_t(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\bar{\tilde{y}}_t. \tag{7.1.44}$$

Согласно формуле связи стохастических интегралов (1.5.9) при переходе от одной формы записи к другой могут измениться лишь члены, не содержащие стохастических дифференциалов. Поэтому уравнение (44) в симметризованной записи примет вид

$$d\Lambda_t = \frac{1}{N}\Lambda_t(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d\bar{\tilde{y}}_t + \mathscr{L}(t)\, dt, \tag{7.1.45}$$

где $\mathscr{L}(t)$ — некоторый функционал наблюдаемых данных, подлежащий определению. Из (1.5.9) следует, что

$$\mathscr{L}(t)\, dt = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}[\eta(t),\ t]\, b_{it}dt, \tag{7.1.46}$$

где $\eta(t) = \{\eta_1(t), \ldots, \eta_m(t)\}$ — векторный процесс, зависящий только от прошлых значений наблюдаемого процесса y_u, $u \leqslant t$, т. е. от реализации $Y_t = \{y_u,\ 0 \leqslant u \leqslant t\}$; b_{it} — коэффициенты взаимосвязи:

$$b_{it}dt = \mathrm{M}[d^*\eta_{it} d^*\bar{\tilde{y}}_t \mid \eta(t) = \eta,\ Y_t = Y] = \overline{d^*\eta_{it} d^*\bar{\tilde{y}}_t}. \tag{7.1.47}$$

В рассматриваемом случае (44), (45) имеем $m = 2$, а $\eta(t) = \{\Lambda_t, \hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t}\}$. Конкретизируя (46) для этого случая, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = \frac{1}{N}(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t}), \qquad b_{1t}dt = \overline{d^*\Lambda_t d^*\bar{\tilde{y}}_t},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} = \frac{1}{N}\Lambda_t, \quad b_{2t}dt = \overline{d^*(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\bar{\tilde{y}}_t},$$

$$\mathscr{L}(t)\, dt = -\frac{1}{2N}\Big\{(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\,\overline{d^*\Lambda_t d^*\bar{\tilde{y}}_t} +$$

$$+ \Lambda_t \overline{d^*(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d^*\bar{\tilde{y}}_t}\Big\}. \tag{7.1.48}$$

Найдем теперь условные математические ожидания (47), входящие в (48). Используя (44), получим

$$\overline{d^*\Lambda_t d^*\bar{\tilde{y}}_t} = \Lambda_t(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, dt. \tag{7.1.49}$$

Второе слагаемое в (48) содержит итовский дифференциал оценок $\widehat{S}_t$, $\widehat{V}_{1t}$, $\widehat{V}_{0t}$. Раскрывая их смысл и находя полный дифференциал оценок, получаем

$$\overline{d^*(\widehat{S}_t+\widehat{V}_{1t}-\widehat{V}_{0t})\,d^*\overline{\overline{y}}}=$$

$$=\iint \frac{\partial[S(x)+V(\eta)]}{\partial\overline{y}}\,\overline{w_1 dx d\eta d^*\overline{\widetilde{y}}_t d^*\overline{y}_t}+\iint[S(x)+V(\eta)]\,\overline{d^*w_1 d^*\overline{\widetilde{y}}dx d\eta}-$$

$$-\int\frac{\partial V(\eta)}{\partial\overline{y}}\,\overline{w_0 d\eta d^*\overline{\widetilde{y}}d^*\overline{y}}-\int V(\eta)\,\overline{d^*w_0 d^*\overline{\widetilde{y}}_t d\eta}=$$

$$=NM\left[\frac{\partial[S(x)+V(\eta)]}{\partial\overline{y}}\,\Big|\,y_0^{\,t},\ \theta=1\right]-NM\left[\frac{\partial V(\eta)}{\partial\overline{y}}\,\Big|\,y_0^{\,t},\ \theta=0\right]+$$

$$+\iint[S(x)+V(\eta)]\,\overline{d^*w_1 d^*\overline{\widetilde{y}}dx d\eta}-\int V(\eta)\,\overline{d^*w_0 d^*\overline{\widetilde{y}}_t d\eta}, \qquad (7.1.50)$$

где $w_1=w_1(x_t,\ \eta_t)=p(x_t,\ \eta_t|y_0^t,\ \theta=1)$, $w_0=w_0(\eta_t)=p(\eta_t|y_0^t,\ \theta=0)$ — апостериорные плотности вероятностей при наличии и отсутствии сигнала соответственно.

Поскольку сигнал и помеха не зависят от наблюдаемого процесса (согласно (30)), то оценки их производных по $\overline{y}$ при различных ситуациях ($\theta=0{,}1$) обращаются в нуль.

Следовательно, остается определить члены типа $\overline{d^*w_\theta d^*\overline{\widetilde{y}}_t}$, $\theta=0,\ 1$. Для этого рассмотрим условную плотность вероятностей

$$p(x_t,\ \eta_t\,|\,y_0^{\,s},\ \theta=1)=w_{1s}(x_t,\ \eta_t),\quad s>t.$$

В силу свойств условных вероятностей и определения производной одной меры по другой для $w_{1s}(x_t,\ \eta_t)$ можно записать соотношение

$$p(x_t,\ \eta_t\,|\,y_0^{\,t},\ y_0^{\,s},\ \theta=1)\,dp(y_t^{\,s}\,|\,y_0^{\,t},\ \theta=1)=$$

$$=p(x_t,\ \eta_t\,|\,y_0^{\,t},\ \theta=1)\ dp(y_t^{\,s}\,|\,y_0^{\,t},\ x_t,\ \eta_t,\ \theta=1)$$

или

$$w_{1s}(x_t,\ \eta_t)=w_1(x_t,\ \eta_t)\,\frac{\partial\widetilde{\mu}_y}{\partial\mu_{\overline{y}_1}}(y_t^{\,s})=w_1(x_t,\ \eta_t)\,\lambda_t^{\,s}, \qquad (7.1.51)$$

где $\widetilde{\mu}_y$ — условная вероятностная мера, отвечающая процессу y_u, $t\leqslant u\leqslant s$, в предположении, что известны x_t, η_t, y_t; $\mu_{\overline{y}1}$ — условная вероятностная мера, отвечающая процессу (34) на отрезке $[t,\ s]$ при известной реализации y_0^t.

Для определения $\lambda_t^{\,s}$ учтем, что производная Радона — Никодима меры $\mu_{\overline{y}1}$ относительно винеровской определяется соотношением

$$\frac{d\mu_{\overline{y}1}}{d\mu_\omega}=\exp\left\{\frac{1}{N}\int\limits_t^s(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})\,d^*\overline{y}_u-\frac{1}{2N}\int\limits_t^s(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})^2\,du\right\},$$

а аналогичную производную меры $\widetilde{\mu}_y$ по винеровской можно представить в виде (см., например, [68]):

$$\frac{d\widetilde{\mu}_y}{d\mu_\omega}=M\left\{\exp\left\{\frac{1}{N}\int_t^s [S(x_u)+V(\eta_u)]\,d^*\overline{y}_u-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2N}\int_t^s (S(x_u)+V(\eta_u))^2\,du\right\} \Big| \, x_t,\ \eta_t,\ y_0^u\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{N}\int_t^s (\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u})\,d^*\overline{y}_u-\frac{1}{2N}\int_t^s (\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u})^2\,du\right\},$$

где

$$\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u}=M[S(x_u)+V(\eta_u)\,|\,x_t,\ \eta_t,\ y_0^u,\ \theta=1].$$

Отсюда следует

$$\lambda_t^s=\exp\left\{\frac{1}{N}\int_t^s (\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u}-\widehat{S}_u-\widehat{V}_{1u})\,d^*y_u-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2N}\int_t^s [(\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u})^2-(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})^2\,du\right\}. \qquad (7.1.52)$$

Дифференцируя (52) по правилу Ито, а затем интегрируя и учитывая начальное условие $\lambda_t{}^t=1$, получим

$$\lambda_t^s=1+\frac{1}{N}\int_t^s \lambda_t^u(\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u}-\widehat{S}_u-\widehat{V}_{1u})\,[d^*\overline{y}_u-(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})\,du].$$

Подставляя это соотношение в (51), найдем

$$w_{1s}(x_t,\ \eta_t)=w_1(x_t,\ \eta_t)+$$

$$+\frac{1}{N}\int_t^s \lambda_t^u w_1(x_t,\ \eta_t)(\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u}-\widehat{S}_u-\widehat{V}_{1u})\,[d^*\overline{y}_u-(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})\,du].$$

Добавив затем в обе части полученного равенства $w_1(x_s,\ \eta_s)$, будем иметь

$$w_1(x_s,\ \eta_s)-w_1(x_t,\ \eta_t)=$$

$$=\frac{1}{N}\int_t^s \lambda_t^u w_1(x_t,\ \eta_t)(\widetilde{S}_u+\widetilde{V}_{1u}-\widehat{S}_u-\widehat{V}_{1u})\,[d^*\overline{y}_u-(\widehat{S}_u+\widehat{V}_{1u})\,du]+$$

$$+w_1(x_s,\ \eta_s)-w_{1s}(x_t,\ \eta_t). \qquad (7.1.53)$$

Поведение разности $p(x_s,\ \eta_s\,|\,y_0^s,\ \theta=1)-p(x_t,\ \eta_t\,|\,y_0^s,\ \theta=1)$ полностью определяется статистическими свойствами приращений процессов x_τ, η_τ, $t\leqslant\tau\leqslant s$, так как реализация процесса y_τ на отрезке $[t,\ s]$ считается известной. Поэтому (53) можно представить в дифференциальной форме:

$$dw_1(x_t,\ \eta_t)=$$

$$=\frac{1}{N}w_1(x_t,\ \eta_t)\,[S(x_t)+V(\eta_t)-\widehat{S}_t-\widehat{V}_{1t}]\,[d^*\overline{y}_t-(\widehat{S}_t+\widehat{V}_{1t})\,dt]+dK_t,$$

$$(7.1.54)$$

где через dK_t обозначен некоторый функционал, определяемый наблюдаемым процессом $Y_t=\{y_0^u, u\leqslant t\}$, процессами x_t, η_t, а также их приращениями dx_t, $d\eta_t$.

Введем дополнительное ограничение (отсутствующее в п. 7.1.3): предположим, что процессы x_t и η_t, входящие в (30), статистически не зависят от шума ξ_t. Тогда, умножив обе части равенства (54) на d^*y_t и затем усреднив, получим

$$\overline{d^*w_1(x_t, \eta_t)\, d^*\tilde{\bar{y}}_t} = \\ = w_1(x_t, \eta_t)\,[S(x_t) + V(\eta_t) - \hat{S}_t - \hat{V}_{1t}]\, dt. \qquad (7.1.55)$$

Здесь учтено, что в силу введенного ограничения функционал dK_t не зависит от приращений наблюдаемого процесса, при этом

$$\overline{d^*K_t d^*\tilde{\bar{y}}_t} = 0. \qquad (7.1.56)$$

Поступая аналогично предыдущему, можно получить соотношение, подобное (55), для ситуации $\theta=0$:

$$\overline{d^*w_0(\eta_t)\, d^*\tilde{\bar{y}}} = w_0(\eta_t)\,[V(\eta_t) - \hat{V}_{0t}]\, dt. \qquad (7.1.57)$$

Подстановка соотношений (55), (57) в (50), а затем в (48) с учетом (49) дает

$$\mathscr{L}(t)\, dt = -\frac{\Lambda_t}{2N}\,[\widehat{(S_t + V_{1t})^2} - \widehat{V^2_{0t}} + 2\hat{V}^2_{0t} - 2\hat{V}_{0t}(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t})]\, dt,$$

где

$$\widehat{(S_t + V_{1t})^2} = M\,\{[S(x_t) + V(\eta_t)]^2 \mid y_0^t, \theta = 1\},$$
$$\widehat{V^2_{0t}} = M\,[V^2(\eta_t) \mid y_0^t, \theta = 0].$$

Интегрирование уравнения (45) приводит к выражению для ОП в симметризованной форме

$$\Lambda_T = \exp\left\{\frac{1}{N}\int_0^T (\hat{S}_t + \hat{V}_{1t} - \hat{V}_{0t})\, d\bar{\bar{y}}_t - \frac{1}{2N}\times\right. \\ \left.\times\int_0^T [\widehat{(S_t + V_{1t})^2} - \widehat{V^2_{0t}} + 2\hat{V}^2_{0t} - 2\hat{V}_{0t}(\hat{S}_t + \hat{V}_{1t})]\,dt\right\}. \qquad (7.1.58)$$

Если применить изложенную методику получения симметризованных уравнений к алгоритму (23), то придем к соотношению (25), найденному методом отбрасывания членов $(\Delta y)^2$ при предельном переходе. Последний метод приводит также и к формуле (58).

Таким образом, оба рассмотренных метода получения симметризованных алгоритмов дают одинаковый результат, если сигнал $S(x_t)$ и помеха $V(\eta_t)$ не зависят от наблюдаемого процесса y_t и, кроме того, статистически не зависят от белого шума ξ_t.

Однако в случае зависимости сигнала (или помехи) от наблюдаемого процесса, как следует из (50), появляются дополнительные члены, которые не будут учтены, если использовать метод отбрасывания чле-

нов $(\Delta y)^2$. Подобная ситуация может встречаться на практике, например в системах с обратной связью или с переспросом, в гидролокации и т. д. В таких случаях для получения симметризованных алгоритмов нужно применять метод, изложенный в данном пункте.

В случае зависимости сигнала (или помехи) от белого шума также появятся дополнительные члены, поскольку равенство (56) уже не выполняется.

Рассмотрим общий случай, когда наблюдаемый процесс определяется уравнением

$$d\bar{y}_t = \begin{cases} \Phi(x_t, \eta_t, \bar{y}_t, t)\,dt + \sqrt{N}d\omega_t, & \theta = 1, \\ V(\eta_t, \bar{y}_t, t)\,dt + \sqrt{N}d\omega_t, & \theta = 0; \end{cases}$$

процессы $\Phi(x_t, \eta_t, \bar{y}_t, t)$ и $V(\eta_t, \bar{y}_t, t)$ удовлетворяют условиям типа (31)—(33). Процессы x_t и η_t, не зависимые от будущего винеровского процесса ω_t, статистически зависят от настоящего и прошлого процесса ω_t; эта взаимосвязь характеризуется коэффициентами C_{1t} и C_{0t}, определяемыми соотношениями

$$C_{1t}dt = \mathrm{M}[d^* x_t d\omega_t \mid x_0^t, \bar{y}_0^t];$$

$$C_{0t}dt = \mathrm{M}[d^* \eta_t d\omega_t \mid x_0^t, \bar{y}_0^t].$$

Изложенная выше методика получения симметризованных уравнений дает следующую формулу для ЛП [54]:

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t})\,d\bar{y}_t -$$

$$-\frac{1}{2N}\int_0^T (\widehat{\Phi^2_t} - \widehat{V^2_{0t}} + \widehat{C_{1t}\Phi_{xt}} + \widehat{C_{0t}\Phi_{\eta t}} + N\hat{\Phi}_{yt} - \widehat{C_{0t}V_{\eta t}} - N\hat{V}_{yt})\,dt, \quad (7.1.59)$$

где

$$\hat{\Phi}_t = \mathrm{M}[\Phi(x_t, \eta_t, \bar{y}_t, t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 1],$$

$$\widehat{\Phi^2}_t = \mathrm{M}[\Phi^2(x_t, \eta_t, \bar{y}_t, t) \mid \bar{y}^t_0, \theta = 1],$$

$$\hat{V}_{0t} = \mathrm{M}[V(\eta_t, \bar{y}_t, t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 0],$$

$$\widehat{V^2_{0t}} = \mathrm{M}[V^2(\eta_t, \bar{y}_t, t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 0],$$

$$\widehat{C_{1t}\Phi_{xt}} = \mathrm{M}\left[C_{1t}\frac{\partial\Phi(x, \eta_t, \bar{y}_t, t)}{\partial x}^{(x = x_t)}\middle|\, \bar{y}_0^t, \theta = 1\right],$$

$$\widehat{C_{0t}\Phi_{\eta t}} = \mathrm{M}\left[C_{0t}\frac{\partial\Phi(x_t, \eta, \bar{y}_t, t)}{\partial\eta}(\eta = \eta_t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 1\right],$$

$$\hat{\Phi}_{yt} = \mathrm{M}\left[\frac{\partial\Phi(x_t, \eta_t, \bar{y}, t)}{\partial\bar{y}}(\bar{y} = \bar{y}_t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 1\right],$$

$$\hat{V}_{yt} = \mathrm{M}\left[\frac{\partial V(\eta_t, \bar{y}, t)}{\partial\bar{y}}(\bar{y} = \bar{y}_t) \mid \bar{y}_0^t, \theta = 0\right]. \quad (7.1.60)$$

Если сигнал и помеха не зависят от наблюдаемого процесса $\bar{y}_t$, то оценки (60) обращаются в нуль. Если к тому же положить $C_{1t}=C_{0t}=0$ (сигнал и помеха не зависят от шума ω_t) и принять

$$\Phi(x_t, \eta_t, t)=S(x_t, t)+\eta_t, \quad V(\eta_t, t)=\eta_t,$$

то формула (59) переходит в (25).

7.2. КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

Преследуя цель получения более простых алгоритмов обнаружения, рассмотрим некоторые квазиоптимальные алгоритмы [99, 101, 103].

7.2.1. Случай, когда коррелированная помеха отсутствует. В данном случае оптимальные оценочно-корреляционные алгоритмы обнаружения сигналов в шуме определяются формулами (7.1.2)—(7.1.5).

В ряде практических задач сигнал $S(x_t, t)$ представляет собой радиосигнал, параметр которого x_t является неэнергетическим (фаза, частота). В этих случаях каждый из членов $\widehat{S}_t^2, \widehat{S_t^2}$, входящих в (7.1.2), (7.1.3), распадается на сумму неинформативной константы и вибрационных членов двойной частоты (аналогично п. 6.2), дающих малый вклад. Пренебрегая последними в (7.1.2), (7.1.3), получим

$$z_T=\int_0^T \widehat{S}_t y_t\, dt. \tag{7.2.1}$$

Стохастический интеграл здесь можно понимать как в симметризованном смысле, так и в смысле Ито. В рамках данного приближения различие между обеими формами записи из-за членов $\widehat{S}_t^2$ и $\widehat{S_t^2}$ исчезает. Но некоторое различие в обработке все же остается, в частности, потому, что рассматриваемые интегралы моделируются по-разному. При этом следует учитывать, что симметризованный интеграл более адекватен обычной аналоговой технике интегрирования, чем интеграл Ито.

К алгоритму (1) можно прийти и другим путем, не вводя указанное ограничение на сигнал (радиосигнал с неэнергетическим параметром). Но тогда потребуется иное ограничение: сигнал должен быть слабым.

Введем малый параметр q:

$$S(x_t, t)=qS_0(x_t, t), \tag{7.2.2}$$

играющий роль амплитудного детерминированного множителя или отношения сигнал/шум (при соответствующей нормировке см. п. 6.3.1). Подставляя (2) в (7.1.2), (7.1.3) и пренебрегая при $q\longrightarrow 0$ членами, содержащими q^2, получим (1). Асимптотически оптимальный алгоритм (1) обнаружения слабых сигналов получается также путем предельного перехода в алгоритме типа (6.3.18).

Поскольку в наблюдаемом процессе при $\theta=1$

$$y_t=qS_0(x_t, t)+\xi_t \tag{7.2.3}$$

содержится малый параметр q, то на первый взгляд может показаться, что пренебрежение в (7.1.2), (7.1.3) только членами типа $q^2\widehat{S}_{0t}{}^2(\widehat{S}_{0t}=$

$=\mathbf{M}[S_0(x_t, t)\,|y_0^t, \theta=1])$ правомерно лишь в случае $\theta=0$, когда $y_t=\xi_t$ и в соответствии с (7.1.2)

$$z_t=\frac{1}{N}\int_0^T q\widehat{S}_{0t}\xi_t d^*t-\frac{1}{2N}\int_0^T q^2\widehat{S}^2_{0t}\,dt \underset{(q\to 0)}{\approx} \frac{1}{N}\int_0^T q\widehat{S}_{0t}\xi_t d^*t,$$

и неправомерно для $\theta=1$. Поэтому остановимся подробнее на случае $\theta=1$.

Согласно представлению (1.4.23)

$$y_t=q\widehat{S}_{0t}+\widetilde{\xi}_t, \tag{7.2.4}$$

где $\widetilde{\xi}_t$ — белый шум. Подставляя (3), (4) в (7.1.2), имеем при $\theta=1$

$$z_T=\frac{1}{N}\int_0^T q\widehat{S}_{0t}\,(q\widehat{S}_{0t}+\widetilde{\xi}_t)\,d^*t-\frac{1}{2N}\int_0^T q^2\widehat{S}^2_{0t}dt=$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^T q\widehat{S}_{0t}\widetilde{\xi}_t d^*t+\frac{1}{2N}\int_0^T q^2\widehat{S}^2_{0t}dt. \tag{7.2.5}$$

Так как $\widetilde{\xi}_t$ и y_t связаны взаимно однозначным преобразованием, то наблюдение $\widetilde{\xi}_t$ эквивалентно наблюдению y_t и поэтому алгоритм $\int_0^T q\widehat{S}_{0t}\times\widetilde{\xi}_t dt$ эквивалентен*) $\int_0^T q\widehat{S}_{0t}y_t dt$. Отсюда и из (5) следует правомерность оценочно-корреляционного алгоритма обнаружения слабых сигналов

$$z_T=\int_0^T \widehat{S}_t y_t d^*t \tag{7.2.6}$$

и для ситуации $\theta=1$.

На рис. 7.1,*а* представлена структурная схема приемника в соответствии с алгоритмами (1), (6), непосредственно выражающими оценочно-корреляционный принцип обнаружения сигналов в шуме. Если полезный сигнал $S(t)$ является детерминированным, то задача его измерения отпадает $(S_t=S(t))$ и схема рис. 7.1,*а* переходит в классический корреляционный обнаружитель. В таком приемнике в качестве «опорного» сигнала используется сам обнаруживаемый сигнал, который заранее известен. В общем же случае при обработке стохастического сигнала, являющегося неизвестным наблюдателю, опорным колебанием

---

*) Строго говоря, обсуждаемая эквивалентность имеет место по крайней мере при условиях, обеспечивающих существование сильного решения (см. [69], с. 146) стохастического уравнения

$$d\overline{y}_t=q\widehat{S}_{0t}dt+\sqrt{N}d\widetilde{\omega}_t\left(\widetilde{\omega}_t=\frac{1}{\sqrt{N}}\int_0^t \xi_\tau d\tau\right).$$

При этом процесс $\widetilde{\omega}_t$ несет ту же информацию, что и процесс $\overline{y}_t=\int_0^t y_\tau d\tau$.

служит оценка — отфильтрованное от шумов значение полезного сигнала ($\theta=1$); при $\theta=0$ опорное колебание превращается в псевдооценку.

Рассматриваемый оценочно-корреляционный приемник представляет собой систему совместного обнаружения и оценивания. Сигнал на выходе ключевого блока (рис. 7.1,*а*) можно использовать в качестве измеренного значения полезного сигнала. При этом экономится общее время обработки (обнаружения-измерения). В обычных же системах лишь после окончания обнаружения система переходит в режим измерения и формирует оценку.

В оценочно-корреляционном приемнике удачно реализуется и режим подтверждения, когда блок обнаружения не прекращает своей

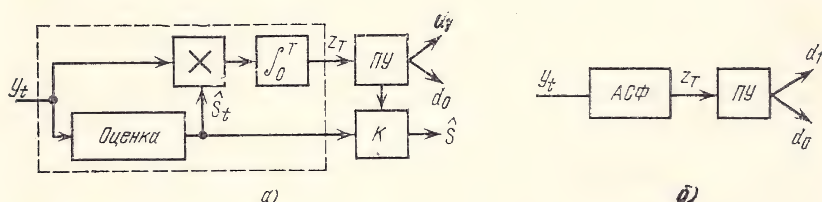


Рис. 7.1

работы и после установления факта наличия сигнала. При этом обнаружитель работает совместно с блоком оценки и является индикатором срыва измерения (слежения).

Оценочно-корреляционному алгоритму (1) можно дать фильтровую интерпретацию. Если бы оценка $\hat{S}_t$ была бы заранее известной функцией времени $\hat{S}_t=S(t)$ (как при обнаружении детерминированного сигнала), то рассматриваемый алгоритм реализовывался бы обычным линейным согласованным фильтром с импульсной характеристикой $S(T-t)$. В общем же случае оценка, разумеется, зависит от наблюдаемой реализации случайного процесса $\{y_t\}$, в результате и параметры фильтра также зависят от нее, при этом фильтр будет нелинейным. Фильтрующее устройство, моделирующее (1), можно назвать адаптивным согласующимся фильтром (АСФ) (рис. 7.1,*б*). Данный фильтр «согласуется» со среднеквадратической оценкой стохастического сигнала, формируемой в процессе приема, в то время как при известном сигнале согласование фильтра — его импульсной характеристики — осуществляется заранее с самим сигналом. Адаптивные согласующиеся фильтры относятся к наиболее общему классу систем — нелинейных со случайными параметрами, в общем случае нестационарных. Схема, очерченная на рис. 7.1,*а* пунктиром, может рассматриваться как оценочно-корреляционная реализация такого рода фильтров.

7.2.2. Общий случай. *Оценочно-корреляционно-компенсационный приемник.* Рассмотрим теперь случай, когда на произвольный сигнал, помимо аддитивного белого шума, воздействует и произвольная помеха. Если помеха также аддитивна, то оптимальные оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы обнаружения определяются, например, формулами (7.1.11), (7.1.12).

В радиотехнических задачах, когда оцениваемые параметры сигнала и помехи являются неэнергетическими, вторыми слагаемыми

в (7.1.11), (7.1.12) можно пренебречь, при этом придем к приближенному алгоритму

$$Z_T = \frac{1}{N}\int_0^T (\widehat{S}_t + \widehat{V}_{1t} - \widehat{V}_{0t})\, y_t dt. \qquad (7.2.7)$$

Структурная схема оценочно-корреляционно-компенсационного приемника показана на рис. 7.2,*а*. Верхний канал схемы конструируется так, чтобы оптимальным образом (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) выделить из белого шума и сигнал, и помеху в предположении $\theta=1$, нижний — чтобы оптимально выделить одну помеху

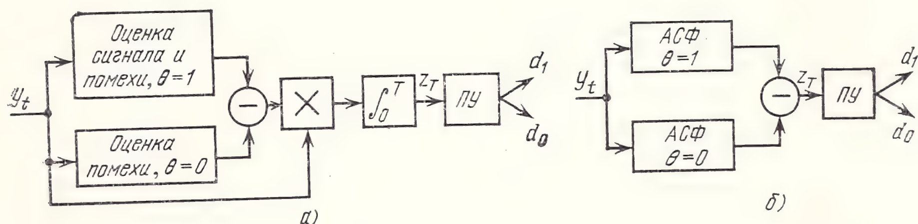


Рис. 7.2

в предположении $\theta=0$. После вычитания, компенсирующего помеху, осуществляется корреляция с наблюдаемыми данными (эти операции можно поменять местами). Алгоритм (7) можно также представить в трехканальном варианте, разделяя верхний канал (рис. 7.2,*а*) на блок оценки сигнала и блок оценки помехи ($\theta=1$), при этом с выхода первого через ключевой блок получаем оценку сигнала.

На рис. 7.2,*б* изображена структурная схема оценочно-корреляционно-компенсационного алгоритма (7) в соответствии с фильтровой интерпретацией; адаптивные согласующиеся фильтры (АСФ) понимаются в прежнем смысле. В трехканальном варианте блок АСФ ($\theta=1$) представляется в виде двух адаптивных согласующихся фильтров: один фильтр согласуется с сигналом, а другой с помехой в условиях $\theta=1$; последний отличается от фильтра, согласующегося с помехой при $\theta=0$. В частном же случае, когда полезный сигнал $S(t)$ детерминированный, адаптивный согласующийся с сигналом фильтр превращается в обычный согласованный. При этом адаптивные фильтры, согласующиеся с помехой при $\theta=1$ и 0, могут быть идентичными, тогда на вход первого нужно подавать $y_t - S(t)$, а на вход другого y_t.

Слабые детерминированные и квазидетерминированные сигналы (дискретное время). Перейдем теперь к случаю слабых сигналов. При этом рассмотрение задач начнем с рекуррентного алгоритма (7.1.20).

Вначале для простоты сигнал будем считать детерминированной функцией дискретного времени $S(t_k)$, $k=0, 1, \ldots$ Разложим условную плотность $\rho[y_k - S(t_k) - \eta_k]$, входящую в (7.1.20), в ряд по степеням S. Тогда (7.1.20) можно записать в виде

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1}\left[\frac{\mathbf{M}_1\rho\,(y_k-\eta_k)}{\mathbf{M}_0\rho\,(y_k-\eta_k)} - S(t_k)\,\frac{\mathbf{M}_1\rho'\,(y_k-\eta_k)}{\mathbf{M}_0\rho\,(y_k-\eta_k)} + O(S^2)\right], \qquad (7.2.8)$$

где $\mathbf{M}_0$ определяется прежней формулой (7.1.21), а $\mathbf{M}_1$ упрощается:

$$M_1(\cdot)=\int(\cdot)\,p(\eta_k\,|\,y_0^{k-1},\ \theta=1)\,d\eta_k.$$

Рассматривая практически интересный случай мощной помехи (по сравнению не только с сигналом S, но и с шумом ξ_t), воспользуемся соотношением $M_\theta\rho(\eta)\approx\rho(M_\theta\eta)$ (см. [99,122]). При этом (8) переходит в алгоритм

$$\Lambda_k=\Lambda_{k-1}\left[\frac{\rho(y_k-M_1\eta_k)}{\rho(y_k-M_0\eta_k)}-S(t_k)\,\frac{\rho'(y_k-M_1\eta_k)}{\rho(y_k-M_0\eta_k)}+O(S^2)\right], \qquad (7.2.9)$$

являющийся асимптотически оптимальным при большой апостериорной точности (относительно помехи).

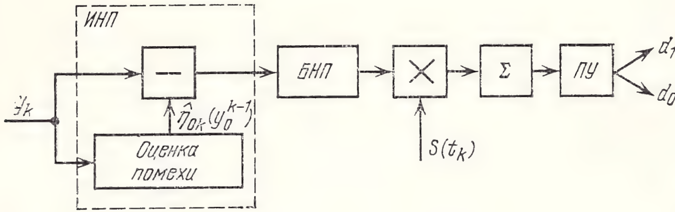


Рис. 7.3

Переходя к слабому сигналу, пренебрежем в (9) малыми членами $O(S^2)$. Далее примем во внимание, что при $S\to 0$ имеем $M_1\eta_k\to M_0\eta_k$, так что при достаточно слабом сигнале можно положить $M_1\eta_k\approx M_0\eta_k$. В результате указанных упрощений для $z_k=\ln\Lambda_k$ получаем следующий алгоритм:

$$z_k=z_{k-1}+S(t_k)\,f\,[y_k-\hat{\eta}_{0k}(y_0^{k-1})], \qquad (7.2.10)$$

где

$$f(x)=-\frac{d}{dx}\ln\rho(x), \qquad (7.2.11)$$

$$\hat{\eta}_{0k}(y_0^{k-1})=M_0\eta_k=\int\eta_k p(\eta_k\,|\,y_0^{k-1},\ \theta=0)\,d\eta_k.$$

Формула (10) определяет квазиоптимальный алгоритм обнаружения слабых детерминированных сигналов на фоне мощных помех с произвольным распределением вероятностей при наличии шума с независимыми значениями. Структурная схема синтезированного обнаружителя приведена на рис. 7.3.

На входе приемника имеется инерционный, в общем случае нелинейный преобразователь ИНП, который формирует оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\eta_{0k}(y_0^{k-1})$ помехи и вычитает ее из наблюдаемых данных. После ИНП следует безынерционный нелинейный преобразователь БНП, характеристика которого определяется статистикой шума ξ по формуле (11). Затем стоит обычный корреляционный приемник.

В том случае, когда шум ξ — гауссовский, безынерционный нелинейный преобразователь (11) вырождается в линейный — блок БНП отсутствует. Если к тому же коррелированная помеха η является гауссовской, то ИНП переходит в инерционный линейный преобразователь,

поскольку в этом случае оценка $\widehat{\eta}_{0k}(y_{k0}^{k-1})$ представляет собой линейный функционал. Заметим, что если помеха η — гауссовская, а шум ξ — негауссовский, блок ИНП остается нелинейным. Если помеху η вообще исключить из рассмотрения, то обсуждаемый приемник переходит в обнаружитель, представленный на рис. 6.6.

Рассмотрим теперь случай, когда полезный сигнал является квазидетерминированным $S(\mathbf{x}, t)$; плотность вероятностей случайного вектора $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m)\in X$ равна $w_0(\mathbf{x})$. Предположим, что оценивать параметры $\mathbf{x}$ сигнала не требуется. Тогда целесообразно представить ОП в виде (см. (4.3.54))

$$\Lambda_n = \int\limits_X \exp\{z_n(\mathbf{x})\}\, w_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где

$$z_n(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(y_0{}^n \mid \mathbf{x},\ \theta=1)}{p(y_0{}^n \mid \theta=0)}$$

— логарифм условного отношения правдоподобия. Для $z_n(\mathbf{x})$ справедливо при прежних условиях (сильная помеха, слабый сигнал), представление, аналогичное (10); поэтому при тех же условиях ОП определяется соотношением

$$\Lambda_n \approx \int\limits_X \exp\left\{\sum_{k=0}^{n} S(\mathbf{x}, t_k)\, f\,[y_k - \widehat{\eta}_{0k}(y_0^{k-1})]\right\} w_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \qquad (7.2.12)$$

Для сравнения синтезированного алгоритма с гауссовским обнаружителем — оптимальным обнаружителем квазидетерминированного сигнала $S(\mathbf{x}, t)$ в случае его приема в аддитивном стационарном гауссовском шуме с независимыми значениями при $\mathbf{D}x_i=\sigma_0^2$ $(i=1, \ldots, m)$ — запишем ОП

$$\Lambda_n = \int\limits_X \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2_0}\sum_{k=0}^{n} S(\mathbf{x}, t_k)\, y_k - \frac{1}{2\sigma_0{}^2}\sum_{k=0}^{n} S^2(\mathbf{x}, t_k)\right\} w_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Второе слагаемое под знаком экспоненты, не зависящее от наблюдаемого процесса, для ряда практически интересных моделей сигнала не влияет на структуру оптимального обнаружителя, при этом достаточно сформировать статистику

$$\widetilde{\Lambda}_n = \int\limits_X \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2_0}\sum_{k=0}^{n} S(\mathbf{x}, t_k)\, y_k\right\} w_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \qquad (7.2.12')$$



Рис. 7.4

Сравнивая (12) и (12′), видим, что структурная схема обнаружителя, подающего статистику (12) на пороговое устройство, может быть представлена в виде рис. 7.4, где ГП — гауссовский приемник, формирую-

щий статистику (12′). Таким образом, квазиоптимальный обнаружитель слабых квазидетерминированных сигналов на фоне мощных коррелированных помех с произвольным распределением вероятностей при наличии негауссовского шума с независимыми значениями (рис. 7.4) отличается от обычного гауссовского обнаружителя наличием на входе последнего инерционного и безынерционного в общем случае нелинейных преобразователей (ИНП и БНП).

В более простой ситуации, когда коррелированная помеха отсутствует, так что прием слабых квазидетерминированных сигналов осуществляется в негауссовском шуме с независимыми значениями, в обнаружителе рис. 7.4 блок ИНП исключается.

Декорреляция помех. Выясним физический смысл преобразований, осуществляемых в ИНП. Для этого рассмотрим математическое ожидание

$$I_{ij} = M[y_i - \hat{\eta}_{0i}(y_0^{i-1})][y_j - \hat{\eta}_{0j}(y_0^{j-1})] \tag{7.2.13}$$

при

$$y_i = \eta_i + \xi_i, \quad M\xi_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{7.2.14}$$

В рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned} M\xi_i\xi_j &= M\xi_i M\xi_j = 0, \quad i \neq j; \\ M\eta_i\xi_j &= M\eta_i M\xi_j = 0, \quad i < j. \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

Перепишем (13):

$$\begin{aligned} I_{ij} &= My_iy_j - M[y_i M(\eta_j | y_0^{j-1})] - \\ &- M[M(\eta_i | y_0^{i-1}) y_j] + M[M(\eta_i | y_0^{i-1}) M(\eta_j | y_0^{j-1})]. \end{aligned} \tag{7.2.16}$$

Пусть $i \neq j$, причем вначале положим $i < j$. Используя свойства условного математического ожидания, будем иметь

$$\begin{aligned} & M[y_i M(\eta_j | y_0^{j-1})] = M[M(y_i\eta_j | y_0^{j-1})] = M(y_i\eta_j), \\ & M[M(\eta_i | y_0^{i-1}) y_j] = M\{M[M(\eta_i | y_0^{i-1}) y_j | y_0^{j-1}]\} = \\ & = M\{M(\eta_i | y_0^{i-1}) M(y_j | y_0^{j-1})\}. \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Подставляя (17) в (16) и учитывая (14), (15), получим, что $I_{ij}=0$. Аналогично доказывается справедливость этого равенства и при $i>j$. В результате получаем

$$M[y_i - \hat{\eta}_{0i}(y_0^{i-1})][y_j - \hat{\eta}_{0j}(y_0^{j-1})] = 0 \quad \text{для всех } i \neq j. \tag{7.2.18}$$

Таким образом, блок ИНП преобразует коррелированную последовательность (14), содержащую произвольную помеху и шум, в последовательность некоррелированных случайных величин, т. е. блок ИНП является декоррелятором помех.

Обеляющие фильтры. Рассмотрим теперь случай непрерывного времени. Конкретизируя в (11) плотность $\rho(x)$ для гауссовского шума и осуществляя затем предельный переход в (10), получим

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T S(t)\,\tilde{y}_t\,dt, \tag{7.2.19}$$

где

$$\widetilde{y}_t = y_t - \widehat{\eta}_{0t}, \tag{7.2.20}$$

а $\widehat{\eta}_{0t} = \mathbf{M}[\eta_t | y_0^t, \theta=0]$. Согласно выясненному ранее (см. (7.1.28), (7.1.29)) разность (20) определяет обеляющий фильтр. Таким образом, при указанном переходе к непрерывному времени декоррелятор

$$\widetilde{y}_k = y_k - \widehat{\eta}_{0k}(y_0^{k-1}), \tag{7.2.21}$$

входящий в алгоритм (10), обращается в обеляющий фильтр.

Структурная схема обнаружителя, моделирующего алгоритм (19), показана на рис. 7.5. Она представляет собой обычный согласованный приемник (СФ — согласованный фильтр), на входе которого стоит обеляющий фильтр (ОБФ). Этот обнаружитель можно представить и в виде, показанном на рис .5.2, заменив опорный сигнал $\widetilde{S}(t)$ на $S(t)$.

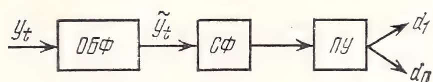


Рис. 7.5

Отметим, что алгоритм (19) дает квазиоптимальный обнаружитель слабых детерминированных сигналов на фоне произвольных помех при наличии белого шума. Однако если ограничиться случаем гауссовских помех (с произвольной корреляционной функцией), то алгоритм (19) становится оптимальным [103]. Нужно только заменить $S(t)$ в (19) на детерминированную функцию $\widetilde{S}(t)$ — результат прохождения $S(t)$ через обеляющий фильтр (20):

$$\widetilde{S}(t) = S(t) - \widehat{\eta}_{0t}(y_0{}^t),$$

который в данном случае является линейным. При этом фильтр СФ в схеме рис. 7.4 должен быть согласован не с $S(t)$ (как в случае (19)), а с $\widetilde{S}(t)$.

Рассмотрим теперь случай стохастических сигналов; для этого введем малый параметр q (см. (2)). Тогда, обращаясь, например, к алгоритму (7.1.27) (или (7.1.23)), пренебрежем в нем при $q \longrightarrow 0$ квадратом оценки $\widehat{S}_t^2$ (порядок малости $O(q^2)$) по сравнению с самой оценкой $\widehat{S}_t(O(q))$. Кроме того, при сходимости сигнала к нулю имеем $\widehat{\eta}_{1k} \longrightarrow \widehat{\eta}_{0k}$, так что при достаточно слабом сигнале в целях упрощения алгоритма имеет смысл пренебречь разностью*) $\widehat{\eta}_{1t} - \widehat{\eta}_{0t}$. В результате получаем приближенный алгоритм

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T \widehat{S}_t (y_t - \widehat{\eta}_{0t})\, d^*t \tag{7.2.22}$$

---

*) Разность $\widehat{\eta}_{1t} - \widehat{\eta}_{0t}$ имеет порядок малости $O(q)$, и ее (или соответствующий член разложения) следовало бы оставить при отыскании асимптотически оптимального алгоритма. Однако это приведет к существенному усложнению схемы обнаружителя. Здесь рассматриваются квазиоптимальные алгоритмы (см. (10) и (22)), при получении которых члены типа $(\widehat{\eta}_{1t} - \widehat{\eta}_{0t})$ отброшены.

который переходит в (19), если сигнал детерминированный ($\hat{S}_t = S(t)$). Структурная схема системы, моделирующей (22), представлена на рис. 7.6.

Из изложенного, в частности, следует, что как в квазиоптимальных обнаружителях, так и в оптимальных системах (п. 7.1.2, 7.1.3) существенную роль играют обеляющие фильтры. Синтез декорреляторов и обеляющих фильтров определяется разностями (21), (20) и сводится, по существу, к определению байесовских среднеквадратических оценок помех при $\theta=0$.

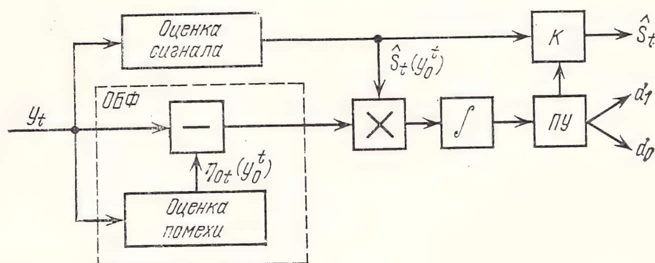


Рис. 7.6

Если воспользоваться марковской аппроксимацией помех, то синтез указанных оценок и, следовательно, обеляющих фильтров можно осуществить непосредственно с помощью результатов предыдущих гл. 4—6. Так, например, если помеха является импульсной типа обобщенного телеграфного сигнала (см. п. 4.3.5), то обеляющий фильтр дается формулой (20), в которую нужно подставить оценку $\widehat{\eta}_{0t} = m_t$, где m_t определяется уравнением (4.3.51). Отметим, что в данном негауссовском случае обеляющий фильтр представляет собой нелинейное устройство.

Синтез декорреляторов и обеляющих фильтров (21), (20) можно осуществлять и приближенными методами, например в рамках гауссовского приближения. При этом, используя уравнения п. 6.1.2 и § 6.2, нетрудно получить обеляющие фильтры для фазомодулированных, частотно-модулированных и других практически интересных помех. Отметим, что полученные в гауссовском приближении фильтры (20) не будут строго обеляющими, поскольку соответствующие оценки помех не строго оптимальны. Однако при большой апостериорной точности относительно помехи (мощная помеха) они будут асимптотически обеляющими в силу асимптотической оптимальности алгоритмов гауссовского приближения в этом случае.

7.3. ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

7.3.1. Постановка задачи. Задача оптимальной нелинейной фильтрации общих стохастических сигналов в шуме представляет интерес как в связи с необходимостью формировать среднеквадратические оценки для алгоритмов обнаружения (см. § 7.1, 7.2), так и сама по себе. Если сигнал (помеха) аппроксимируется компонентой многомерного марковского процесса, то оптимальные оценки находятся при помощи соответ-

ствующих уравнений предыдущих глав. Ниже выводятся уравнения оптимальной нелинейной фильтрации [53] стохастических сигналов, для которых марковское свойство не является обязательным. В качестве математической модели параметра сигнала используется квазимартингал [152].

Итак, пусть наблюдаемый процесс

$$y_t = S(x_t, t) + \xi_t, \quad t \in [0, T], \tag{7.3.1}$$

где S — детерминированная функция; x_t — параметр сигнала, являющийся в общем случае немарковским случайным процессом; ξ_t — белый шум, $M[\xi_t \xi_{t+\tau}] = N\delta(\tau)$. Предположим, что для сигнала $S(x_t, t)$ выполняются условия

$$P\left\{\int_0^t |S(x_\tau, \tau)|\, d\tau < \infty\right\} = 1, \tag{7.3.2}$$

$$M|S(x_t, t)| < \infty, \quad \int_0^t MS^2(x_\tau, \tau)\, d\tau < \infty \tag{7.3.3}$$

при всех $t \in [0, T]$ (подобные, несущественные для практики, ограничения накладывались на сигнал в задаче обнаружения в п. 7.1.3).

Наблюдение процесса (1) эквивалентно наблюдению процесса со стохастическим дифференциалом

$$d\bar{y}_t = S(x_t, t)\, dt + d\omega_t, \tag{7.3.4}$$

где ω_t — винеровский процесс, $M\omega_t = 0$, $M\omega_t^2 = tN$, $\bar{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau$. Заметим, что процесс $\bar{y}_t$ является процессом Ито, существование которого обеспечивается выполнением условия (2).

Для большей степени общности предположим, что процесс $S(x_t, t)$ является некоторым неупреждающим, т. е. не зависящим от будущего, функционалом винеровского процесса ω_t. Статистическую зависимость между $\bar{y}_t$ и x_t можно характеризовать коэффициентом взаимосвязи

$$C_t dt = M[d^* x_t d\bar{y}_t \,|\, x_0^t, \bar{y}_0^t] = \overline{d^* x_t d\bar{y}_t}. \tag{7.3.5}$$

Очевидно, что $C_t = 0$ при полной независимости процесса x_t от ω_t.

Далее предположим, что ненаблюдаемый процесс x_t удовлетворяет теореме о разложении квазимартингалов [152], т. е. его можно представить с вероятностью 1 в виде

$$x_t = x_{1t} + x_{2t}, \quad t \in [0, T], \tag{7.3.6}$$

где x_{1t} — непрерывный мартингал, x_{2t} — процесс с ограниченной вариацией $Mx_{2t}^2 < \infty$.

Отметим, что мартингал x_{1t}, входящий в разложение (6), может представлять собой аддитивную смесь нескольких не зависимых друг от друга мартингалов, разных по структуре. Пусть

$$x_{1t} = \sum_{j=0}^{n} x_{1t}^{(j)}. \tag{7.3.7}$$

Кроме того, предположим, что $Mx_{1t}=0$, а мартингал с индексом $j=0$ построен на базе винеровского процесса ω_t, входящего в (4) (благодаря этому коэффициент (5) отличен от нуля).

Заметим, что квазимартингал (6) охватывает широкий класс случайных процессов; уравнением (6) можно задавать, например, диффузионные марковские процессы, процессы диффузионного типа, процессы Ито.

Пусть $f(x, y, t)$ — действительная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по x, y, t и второго порядка по x, y, причем

$$M[f^2(x_t, \bar{y}_t, t)] < \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{7.3.8}$$

Необходимо по результатам наблюдений за процессом y_t найти апостериорное среднее

$$\hat{f}_t = M[f(x_t, \bar{y}_t, t) \mid y_0^t], \tag{7.3.9}$$

т. е. БСО процесса $f(x_t, \bar{y}_t, t)$. Кроме стохастических уравнений для этой оценки, ниже выводятся стохастические уравнения для АПВ*), которые потребуются, если функция потерь в задаче оценивания отличается от квадратической.

7.3.2. Уравнения в форме Ито. Используя минимальное представление процесса Ито (см. п. 1.4.4), запишем (4) в виде процесса диффузионного типа (это позволяет сделать условие (3))

$$d\bar{y}_t = \hat{S}_t dt + d\tilde{\omega}_t, \tag{7.3.10}$$

где $\hat{S}_t = M[S(x_t, t) \mid y_0^t]$; $\tilde{\omega}_t$ — винеровский процесс. Следуя [141, 45, 151], представим искомую оценку в виде стохастического интеграла по винеровскому процессу

$$\hat{f}_t = \hat{f}_0 + \int_0^t V_t(s)\, d^*\tilde{\omega}_s, \tag{7.3.11}$$

где $\hat{f}_0 = M[f(x_0, y_0, 0) \mid y_0]$ — начальное условие, $Mx_0^2 < \infty$, $M\bar{y}_0^2 < \infty$, $Mx_0\omega_0 = M\bar{y}_0\omega_0 \equiv 0$; $V_t(s)$ — функционал винеровского процесса $\tilde{\omega}_u$, $0 \leqslant u \leqslant s$ такой, что

$$\int_0^t M[V_t^2(s)]\, ds < \infty, \quad t \in [0, T]. \tag{7.3.12}$$

Для определения $V_t(s)$ используем известное свойство среднеквадратических оценок, согласно которому ошибки фильтрации некоррелированы с любым функционалом наблюдаемых данных (и, следовательно, порождающего процесса $\tilde{\omega}_t$). Поэтому

$$M\left[\left\{f(x_t, \bar{y}_t, t) - \hat{f}_0 - \int_0^t V_t(s)\, d^*\tilde{\omega}_s\right\} \int_0^u d^*\tilde{\omega}_s \mid y_\tau, \quad 0 \leqslant \tau < s\right] = 0, \tag{7.3.13}$$

---

*) Уравнения для АПВ выводятся при дополнительных ограничениях на фильтруемый процесс.

где в качестве простейшего функционала взят интеграл по винеровскому процессу $\widetilde{\omega}_t$. Используя свойство стохастических интегралов Ито

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_0^t g(s)\, d^*\widetilde{\omega}_s \int\limits_0^u h(\tau)\, d^*\widetilde{\omega}_\tau\right] = N\int\limits_0^{t\wedge u} \mathrm{M}\,[g(s)\, h(s)]\, ds,$$

$$t \wedge u = \min(t,\, u), \qquad (7.3.14)$$

где $g(s)$ и $h(s)$ удовлетворяют (12), из (13) получаем

$$V_t(u) = \frac{1}{N}\,\frac{d}{du}\,\mathrm{M}\,[f(x_t,\, \overline{y}_t,\, t)\, \widetilde{\omega}_u \mid y_\tau,\quad 0 \leqslant \tau < u],\quad t > u.$$

Таким образом, согласно (11),

$$\widehat{f}_t = \widehat{f}_0 + \frac{1}{N}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\,[f(x_t,\, \overline{y}_t,\, t)\, \widetilde{\omega}_s \mid y_u,\quad 0 \leqslant u < s]\, d^*\widetilde{\omega}_s. \qquad (7.3.15)$$

Отметим, что условие (7) обеспечивает выполнение условия (12) и, следовательно, существование оценки (15).

Представим (15) в дифференциальной форме:

$$d^*\widehat{f}_t = \frac{1}{N}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\,[d^*f(x_t,\, \overline{y}_t,\, t)\widetilde{\omega}_s \mid y_u,\quad 0 \leqslant u < s]\, d^*\widetilde{\omega}_s +$$

$$+ \frac{1}{N}\left(\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\,[f(x_t,\, \overline{y}_t,\, t)\, \widetilde{\omega}_s \mid y_u,\quad 0 \leqslant u < s]\right)_{s=t} d^*\widetilde{\omega}_t. \qquad (7.3.16)$$

Для определения $d^*f(x_t,\, \overline{y}_t,\, t)$ воспользуемся обобщенной формулой дифференцирования [61]. Приведем эту формулу, поскольку здесь и далее она играет существенную роль.

Пусть $\Phi(x,\, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t функция, ψ_t—n-мерный векторный непрерывный мартингал, φ_i—n-мерный векторный возрастающий процесс [61, 76], а векторный процесс A_t определяется стохастическим дифференцальным уравнением

$$d^*\mathrm{A}_t = d\varphi_t + d\psi_t.$$

Тогда стохастический дифференциал функции $\Phi(\mathrm{A},\, t)$ рассчитывается по формуле

$$d^*\Phi(\mathrm{A}_t,\, t) = \frac{\partial\Phi(\mathrm{A}_t,\, t)}{\partial t}\, dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi(\mathrm{A}_t,\, t)}{\partial\psi^{(i)}}\, d\psi_t^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,\, j=1}^n \frac{\partial^2\Phi(\mathrm{A}_t,\, t)}{\partial\psi^{(i)}\partial\psi^{(j)}}\, d\langle \psi^{(i)},\ \psi^{(j)}\rangle_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi(\mathrm{A}_t,\, t)}{\partial\varphi^{(i)}}\, \partial\varphi_t^{(i)}, \qquad (7.3.17)$$

где $\langle \psi^{(i)},\, \psi^{(j)}\rangle_t$ — возрастающий процесс.

Возрастающий процесс $\langle\psi^{(i)},\, \psi^{(j)}\rangle_t$ можно определить уравнением

$$\mathrm{M}\,[(\psi_t^{(i)} - \psi_s^{(i)})\,(\psi_t^{(j)} - \psi_s^{(j)}) \mid \psi_u^{(i)},\ \psi_u^{(j)},\ 0 \leqslant u \leqslant s,\quad t > s] =$$

$$= \mathrm{M}\,[\langle \psi^{(i)},\, \psi^{(j)}\rangle_t \mid \psi_u^{(i)},\, \psi_u^{(j)},\ 0 \leqslant u \leqslant s] - \langle \psi^{(i)},\, \psi^{(j)}\rangle_s.$$

В том частном случае, когда ψ_t — винеровский процесс, а $d\varphi_t^{(i)} = \alpha_t^{(i)}dt$ ($\alpha_t^{(i)}$ — неупреждающий случайный процесс), соотношение (17) приводит к формуле дифференцирования Ито. При этом $d\langle\psi^{(i)},\, \psi^{(j)}\rangle_t = C_t^{(i,\, j)}dt$, где $C_t^{(i,\, j)}$ — коэффициенты взаимной диффузии. (Одномерный вариант формулы дифференцирования Ито — (1.4.20).)

Применяя обобщенную формулу дифференцирования (17) к $f(x_t, \bar{y}_t, t)$ с учетом (4), (6), получаем

$$d^*f(x_t, \bar{y}_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(dx_{2t} + \sum_{j=0}^{n} dx_{1t}^{(j)}\right) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial \omega}\left[S(x_t, t)\,dt + d\omega_t\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}d\langle \omega, \omega\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx_1^2}d\langle x_1, x_1\rangle_t +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial \omega}d\langle x_1, \omega\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial x_1}d\langle \omega, x_1\rangle_t, \qquad (7.3.17')$$

где $\partial f/\partial t$, $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial \omega$ и т. д. — значения производных в точке $(x_t, \bar{y}_t, t)$ (далее используются аналогичные обозначения для других функций и моментов времени, принадлежащих $[0, T)$; $\langle x_1, x_1\rangle_t$, $\langle x_1, \omega\rangle_t$, $\langle \omega, x_1\rangle_t$, $\langle \omega, \omega\rangle_t$ — возрастающие процессы, определяемые уравнениями

$$\mathrm{M}\left[(x_{1t} - x_{1s})^2 \mid x_{1u}, u \leqslant s\right] = \mathrm{M}\left[\langle x_1, x_1\rangle_t \mid x_{1u}, u \leqslant s\right] - \langle x_1, x_1\rangle_s,$$

$$\mathrm{M}\left[(x_{1t} - x_{1s})(\omega_t - \omega_s) \mid x_{1u}, \omega_u, u \leqslant s\right] = \mathrm{M}\left[\langle x_1, \omega\rangle_t \mid x_{1u}, \omega_u, u \leqslant s\right] - \langle x_1, \omega\rangle_s, \qquad (7.3.18)$$

$$\mathrm{M}\left[(\omega_t - \omega_s)^2 \mid \omega_u, u \leqslant s\right] = \mathrm{M}\left[\langle \omega, \omega\rangle_t \mid \omega_u, u \leqslant s\right] - \langle \omega, \omega\rangle_s, \quad t > s.$$

Заметим, что в силу (4), (6) производные $\partial/\partial\omega$, $\partial/\partial x_1$ и т. д. можно заменить соответственно на $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$ и т. д.

Подставим (17′) в (16) и последовательно рассмотрим получающиеся при этом члены.

Для первого члена

$$\frac{1}{N}\int_0^t \frac{d}{ds}\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] d^*\tilde{\omega}_s dt = \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial t} \mid y_0^t\right] dt$$

(здесь и далее используются представления оценок, аналогичные (15)). Для второго члена

$$\frac{1}{N}\int_0^t \frac{d}{ds}\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx_{2t}\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] d^*\omega_s = \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx_{2t} \mid y_0^t\right].$$

В силу независимости $x_{1t}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$ от ω_t третий член равен

$$\frac{1}{N}\int_0^t \frac{d}{ds}\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\sum_{j=0}^{n} dx_{1t}^{(j)}\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] d^*\tilde{\omega}_s =$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^t \frac{d}{ds}\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}dx_{1t}^{(0)}\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] d^*\tilde{\omega}_s.$$

Этот член с учетом того, что

$$\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}d^*\omega_t\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] = 0, \; t > s.$$

обращается в нуль (принцип независимости от будущего). Для четвертого члена

$$\frac{1}{N}\int_0^t \frac{d}{ds}\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(S(x_t, t)\,dt + d\omega_t)\tilde{\omega}_s \mid y_u, 0 \leqslant u < s\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left[S(x_t, t)\frac{\partial f}{\partial y}\,\middle|\, y_0^t\right] dt.$$

Здесь учтено, что

$$\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial y} d^*\omega_t\widetilde{\omega}_s \mid y_u, \quad 0\leqslant u<s\right]=0.$$

Пятый член равен

$$\frac{1}{N}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,Ndt\widetilde{\omega}_s \mid y_u, \quad 0\leqslant u<s\right] d^*\widetilde{\omega}_s =$$

$$=\frac{1}{2}\,N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\middle|\, y_0{}^t\right]dt.$$

Для шестого члена

$$\frac{1}{N}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d<x_1,\ x_1>_t\,\widetilde{\omega}_s \mid y_u, 0\leqslant u<s\right] d^*\widetilde{\omega}_s =$$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d<x_1,\ x_1>_t \mid y_0{}^t\right].$$

Поскольку по условию производные $\partial^2 f/\partial x\partial y$ и $\partial^2 f/\partial y\partial x$ непрерывны, то $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$. Тогда с учетом (18) сумма двух последних слагаемых в (17) дает

$$\frac{1}{N}\int\limits_0^t \frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,d\,\langle\omega,\ x_1\rangle_t\,\widetilde{\omega}_s \mid y_u, \quad 0\leqslant u<s\right] d^*\widetilde{\omega}_s =$$

$$=\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,d\,\langle\omega,\ x_1\rangle_t \mid y_0{}^t\right].$$

Рассмотрим теперь второй член правой части (16). С учетом минимального представления (9) его можно записать в виде

$$\frac{1}{N}\,\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\,[f\,(x_t,\ \overline{y}_t,\ t)\,\widetilde{\omega}_s \mid \widetilde{\omega}_0{}^s]_{s=t}\,d\widetilde{\omega}_t =$$

$$=\frac{1}{N}\left\{\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[f\,(x_t,\ \overline{y}_t,\ t)\int\limits_0^s \widetilde{S}_\tau d\tau \mid \widetilde{\omega}_0{}^s\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[f\,(x_t,\ \overline{y}_t,\ t)\int\limits_0^s d^*\omega_\tau \mid \widetilde{\omega}_0{}^s\right]\right\}_{s=t} d\widetilde{\omega}_t, \qquad (7.3.19)$$

где $\widetilde{S}_t = S\,(x_t,\ t) - \widehat{S}_t$.

Применим теорему Фубини (см., например, [71]) к первому слагаемому в правой части (19). Тогда

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[\int\limits_0^s f\,(x_t,\ \overline{y}_t,\ t)\,\widetilde{S}_\tau\,d\tau \mid y_u, \quad 0\leqslant u<s\right]_{s=t} = \mathrm{M}\left[f\,(x_t,\ \overline{y}_t,\ t)\,\widetilde{S}_t \mid y_0{}^t\right]. \qquad (7.3.20)$$

Второе слагаемое в (19) запишем в виде

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{M}\left[\int\limits_0^t d^*f\,(x_\tau,\ \overline{y}_\tau,\ \tau)\int\limits_0^s d^*\omega_\tau \mid y_u,\ 0\leqslant u<s\right]_{s=t}.$$

Подставляя сюда соотношение (17′), используя (5), а также свойство (14) и теорему Фубини, получаем

$$\left(\frac{d}{ds}\int\limits_0^s \mathrm{M}\left[C_\tau \frac{\partial f}{\partial x} + N\frac{\partial f}{\partial y}\,|\,y_0^\tau\right] d\tau\right)_{s=t} =$$

$$= \mathrm{M}\left[C_t \frac{\partial f}{\partial x}\,\Big|\,y_0{}^t\right] + N\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\,\Big|\,y_0{}^t\right]. \qquad (7.3.21)$$

Равенства (20) и (21) позволяют записать (19) в виде

$$\left\{\frac{1}{N}\mathrm{M}\,[f\,(x_t,\ \bar{y}_t,\ t)\ \widetilde{S}_t\,|\,y_0{}^t] + \frac{1}{N}\mathrm{M}\left[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\,\Big|\,y_0{}^t\right] + \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\,\Big|\,y_0{}^t\right]\right\} d^*\widetilde{\omega}_t.$$

Таким образом, для дифференциала оценки (16) имеем

$$d^*\hat{f}_t = \frac{1}{N}\mathrm{M}\,[f\,(x_t,\ \bar{y}_t,\ t)\,\widetilde{S}_t\,|\,y_0{}^t]\,d\widetilde{\omega}_t + \frac{1}{N}\mathrm{M}\left[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\,\Big|\,y_0{}^t\right]d\widetilde{\omega}_t +$$

$$+ \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\,\Big|\,y_0{}^t\right]d\widetilde{\omega}_t + \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\,\Big|\,y_0{}^t\right]dt + \mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,dx_{2t}\,|\,y_0{}^t\right] +$$

$$+ \mathrm{M}\left[S\,(x_t,\ t)\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\Big|\,y_0{}^t\right]dt + \frac{1}{2}N\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\Big|\,y_0{}^t\right]dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\,\langle x_1,\ x_1\rangle_t\,|\,y_0{}^t\right] + \mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,d\,\langle \omega,\ x_1\rangle_t\,|\,y_0{}^t\right]. \qquad (7.3.22)$$

Соотношение (22) представляет собой уравнение оптимальной нелинейной фильтрации в поставленных выше условиях.

В целях получения уравнения для АПВ введем дополнительные ограничения. Предположим, что функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ в (9) не зависит от $\bar{y}_t$ и t, т. е. $f(x_t,\ \bar{y}_t,\ t) \equiv f(x_t)$.

Далее, входящие в (6) процессы x_{1t} и x_{2t} определим следующим образом:

$$dx_{2t} = a\,(x_t,\ t)\,dt, \quad d^*x_{1t} = b\,(x_t,\ t)\,d\widetilde{x}_t,$$

где $a(x,\ t)$, $b\,(x,\ t)$ — непрерывные на $[0,\ T]$ неупреждающие функции; $\widetilde{x}_t$ — непрерывный мартингал. В этом случае ненаблюдаемый процесс x_t определяется стохастическим уравнением

$$d^*x_t = a\,(x_t,\ t)dt + b\,(x_t,\ t)\,d\widetilde{x}_t.$$

Представим теперь (22) в интегральной форме, раскрыв при этом смысл апостериорного среднего. Далее, предположив существование и непрерывность (с вероятностью 1) производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\omega_t\,(x)\,\frac{\partial x_{2t}}{\partial t}\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\omega_t\,(x)\,C_t\right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\omega_t\,(x)\,\frac{d\,\langle x_1,\ x_1\rangle_t}{dt}\right\},$$

интегрируя по частям в пределах $-\infty,\ \infty$, а затем переходя к дифференциальной форме записи, получим уравнение для АПВ $\omega_t(x)$ процесса $x(t)$:

$$d^*\omega_t\,(x) = \frac{1}{N}\,\omega_t\,(x)\,\widetilde{S}_t d\widetilde{\omega}_t - \frac{1}{N}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\omega_t\,(x)\,C_t)\,d\widetilde{\omega}_t -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\,(\omega_t\,(x)\,dx_{2t}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(\omega_t\,(x)\,d\,\langle x_1,\ x_1\rangle_t). \qquad (7.3.23)$$

7.3.3. Симметризованные уравнения. Переход от стохастических уравнений оптимальной нелинейной фильтрации в форме Ито (22), (23) к симметризованным осуществляется аналогично тому, как это делалось в п. 7.1.4. Опуская выкладки, приведем окончательные результаты [53]: уравнение для оценки

$$d\hat{f}_t = \frac{1}{N} M[f(x_t, \bar{y}_t, t)\tilde{S}_t | y_0^t] d\tilde{\omega}_t + \frac{1}{N} M\left[C_t \frac{\partial f}{\partial x} \middle| y_0^t\right] d\tilde{\omega}_t +$$
$$+ M\left[\frac{\partial f}{\partial y} \middle| y_0^t\right] d\tilde{\omega}_t - \frac{1}{2N}\Big\{M[f(x_t, \bar{y}_t, t)\tilde{S}_t^2 | y_0^t] - \hat{f}_t M[S(x_t, t)\tilde{S}_t | y_0^t] +$$
$$+ M\left[C_t \tilde{f}_t \frac{\partial S}{\partial x} \middle| y_0^t\right] + 2M\left[C_t \tilde{S}_t \frac{\partial f}{\partial x} \middle| y_0^t\right] + M\left[F_t \frac{\partial f}{\partial x} \middle| y_0^t\right] +$$
$$+ M\left[C_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \middle| y_0^t\right]\Big\} dt - M\left[C_t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \middle| y_0^t\right] dt + \hat{S}_t M\left[\frac{\partial f}{\partial y} \middle| y_0^t\right] dt +$$
$$+ M\left[\frac{\partial f}{\partial x} dx_{2t} | y_0^t\right] + M\left[\frac{\partial f}{\partial t} \middle| y_0^t\right] dt +$$
$$+ \frac{1}{2} M\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle x_1, x_1\rangle_t | y_0^t\right] + M\left[\frac{d^2 f}{dx dy} d\langle \omega, x_1\rangle_t | y_0^t\right], \qquad (7.3.24)$$

где $\tilde{f}_t = f(x_t, \bar{y}_t, t) - \hat{f}_t$, $F_t dt = \overline{d^* C_t d\tilde{\omega}_t}$, и уравнение для АПВ

$$dw_t(x) = \frac{1}{N} w_t(x)\tilde{S}_t d\tilde{\omega}_t - \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x}(w_t(x) C_t) d\tilde{\omega}_t - \frac{\partial}{\partial x}(w_t(x) dx_{2t}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w_t(x) d\langle x_1, x_1\rangle_t) - \frac{1}{2N}\tilde{S}_t K(t) dt + \frac{1}{2N} w_t(x)\Phi(t) dt +$$
$$+ \frac{1}{2N} \frac{\partial}{\partial x}[C_t K(t)] dt + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(w_t(x) \frac{\partial C_t}{\partial y}\right) dt, \qquad (7.3.25)$$

где

$$K(t) = w_t(x)\tilde{S}_t - \frac{\partial}{\partial x}(w_t(x) C_t),$$
$$\Phi(t) = M[S(x_t, t)\tilde{S}_t | y_0^t] + M\left[C_t \frac{\partial S}{\partial x} \middle| y_0^t\right].$$

Отметим, что в случае $S \equiv S(x_t, \bar{y}_t, t)$, т. е. когда наблюдаемый процесс (1) является диффузионным, в (24), (25) появятся дополнительные члены, содержащие $M\left[\frac{\partial S}{\partial \bar{y}} \middle| y_0^t\right]$ и $M\left[f(x_t, \bar{y}_t, t) \frac{\partial S}{\partial \bar{y}} \middle| y_0^t\right]$ (аналогично п. 7.1.4).

Симметризованные уравнения можно получить также методом отбрасывания членов типа $(\Delta y)^2$ при предельном переходе от уравнений в дискретном времени к непрерывному. Сравнение уравнений (24), (25) с результатами применения метода отбрасывания указанных членов позволяет сделать вывод, что оба метода приводят к одинаковым уравнениям в том случае, когда

$$C_t = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \bar{y}} = 0. \qquad (7.3.26)$$

Подобные же условия для совпадения результатов применения обоих методов были получены при рассмотрении задачи обнаружения в п. 7.1.4.

7.3.4. Диффузионный марковский сигнал. С методической точки зрения в качестве примера полезно рассмотреть хорошо исследованный в предыдущих главах методами марковской теории случай, когда ненаблюдаемый процесс (полезный сигнал) является диффузионным марковским и входит линейно в наблюдаемый:

$$y_t = x_t + \xi_t, \quad t \in [0, T];$$
$$\dot{x}_t = a(x_t, t) + \sqrt{b(x_t, t)}\,\zeta_t, \quad x_0 = 0.$$

Здесь ξ_t и ζ_t — независимые между собой процессы типа белого шума со спектральными плотностями N и 1 соответственно; $a(x_t, t)$ — коэффициент переноса; $b(x_t, t)$ — коэффициент диффузии.

В данном примере имеем

$$\begin{aligned} dx_{2t} &= a(x_t, t)\,dt, \\ dx_{1t} &= \sqrt{b(x_t, t)}\,d\nu_t, \quad C_t = 0, \end{aligned} \tag{7.3.27}$$

где ν_t — стандартный винеровский процесс; $\nu_t = \int\limits_0^t \zeta_\tau d\tau$.

Используя правило дифференцирования Ито, из (18) получаем

$$\begin{aligned} d\langle x_1, x_1\rangle_\tau &= b(x_\tau, \tau)\,d\tau, \\ \langle x_1, \omega\rangle_t &= 0, \ \langle \omega, \omega\rangle_t = Nt. \end{aligned} \tag{7.3.28}$$

Конкретизация уравнений (22), (23) с учетом (27), (28), приводит к следующим результатам:

$$d^*\widehat{x}_t = \frac{1}{N}(\widehat{x_t^2} - \widehat{x}_t^2)(d\bar{y}_t - \widehat{x}_t dt) + \widehat{a}_t dt; \tag{7.3.29}$$

$$d^*w_t(x) = \frac{1}{N} w_t(x)(x - \widehat{x}_t)(d\bar{y}_t - \widehat{x}_t dt) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}[w_t(x)\,a(x, t)]\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[w_t(x)\,b(x, t)]\,dt, \tag{7.3.30}$$

где $\widehat{a}_t = \mathbf{M}[a(x_t, t)\,|\,y_0^t]$; $\widehat{x_t^2} = \mathbf{M}[x_t^2\,|\,y_0^t]$.

Подставляя в (24) и (25) $f(x_t, y_t, t) = x_t$, а также соотношения (27), (28), получаем симметризованные уравнения:

$$dw_t(x) = \frac{1}{N} w_t(x)(x - \widehat{x}_t)(d\bar{y}_t - \widehat{x}_t dt) - \frac{\partial}{\partial x}[w_t(x)\,a(x, t)]\,dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[w_t(x)\,b(x, t)]\,dt - \frac{1}{2N} w_t(x)(x - \widehat{x}_t)^2 dt + \frac{1}{2N} w_t(x)(\widehat{x_t^2} - \widehat{x}_t^2)\,dt, \tag{7.3.31}$$

$$d\widehat{x}_t = \frac{1}{N}(\widehat{x_t^2} - \widehat{x}_t^2)\,d\bar{y}_t + \left\{-\frac{1}{2N}\widehat{x_t^3} + \frac{1}{2N}\widehat{x}_t\widehat{x_t^2} + \widehat{a}_t\right\} dt. \tag{7.3.32}$$

Уравнения (30)—(32) совпадают с полученными ранее (иными методами) уравнениями (4.2.24)—(4.2.26), (6.1.2) (для случая $S(x_t, t) = x_t$) соответственно.

Глава 8

АНАЛИЗ СИСТЕМ ОБНАРУЖЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ

В главах 4—7 исследовались задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных систем обнаружения и фильтрации сигналов; здесь будут рассмотрены методы анализа этих систем — методы определения качества их работы.

Синтезированные выше системы обнаружения включают в себя в качестве составных частей приемники фильтрации, которые представляют и самостоятельный интерес. С анализа этих приемников мы и начнем рассмотрение задач данной главы. Что же касается обнаружителей, то их анализ оказывается более сложным, чем анализ блоков фильтрации. Методам анализа систем обнаружения будет уделено наибольшее внимание.

8.1. АНАЛИЗ ФИЛЬТРАЦИИ

8.1.1. Общие соотношения. Если оптимальная система фильтрации формирует АПВ $w_t(x)=p(x_t|y_0^t)$ оцениваемого процесса x_t, то качество фильтрации будет определяться распределением вероятностей этого функционала $w_t(x)=\varphi(y_0^t)$, который сам является случайным процессом на множестве реализаций y_0^t наблюдаемого процесса $\{y_\tau\}$, $\tau\in[0, t]$ (время может быть как непрерывным, так и дискретным). Более удобно характеризовать качество оптимальной фильтрации «шириной» апостериорного распределения, мерой которой может служить апостериорная дисперсия:

$$K_t=\mathrm{M}\{[x_t-\mathrm{M}(x_t\,|\,y_0^t)]^2\,|\,y_0^t\}. \qquad (8.1.1)$$

Если существует и известна АПВ $w_t(x)$, то апостериорная дисперсия (1) вычисляется по формуле

$$K_t=\int(x-\hat{x}_t)^2\,w_t(x)\,dx, \qquad (8.1.2)$$

где

$$\hat{x}_t=\mathrm{M}[x_t\,|\,y_0^t]=\int x w_t(x)\,dx. \qquad (8.1.3)$$

Обычно же на выходе системы фильтрации формируется не АПВ, а оценка d_t фильтруемого процесса x_t. В этом случае качество системы фильтрации определяется распределением вероятностей оценки $d_t=$ $=\delta(y_0^t)$. В байесовской постановке задачи (см. п. 2.1.2 и 2.3.2), когда задана функция потерь $c(x_t, d_t)$, качество оценки характеризуется средним риском

$$R_t=\mathrm{M}c(x_t,\ \delta(y_0^t)).$$

Качество оптимальной (в смысле байесовского критерия) системы фильтрации определяется байесовским риском

$$R^*_t=\mathrm{M}c(x_t,\ \delta^*(y_0^t)), \qquad (8.1.4)$$

где $\delta^*(y_{0t})=d^*_t$ — оценка, минимизирующая средний риск. При квадратичной функции потерь $c(x_t, d_t)=(x_t-d_t)^2$ оптимальная оценка равна (3) $d^*_t=\hat{x}_t$, а байесовский риск

$$R^*_t=\mathrm{M}(x_t-\hat{x}_t)^2\equiv D_t \qquad (8.1.5)$$

является средним квадратом ошибки фильтрации. Эту величину можно получить усреднением апостериорной дисперсии (1):

$$D_t = \mathrm{M}\{\mathrm{M}[(x_t - \widehat{x}_t)^2 | y_0{}^t]\} = \mathrm{M}K_t. \tag{8.1.6}$$

Средним квадратом ошибки можно описывать качество и любых других оценок d_t, в частности, неоптимальных:

$$\widetilde{D}_t = \mathrm{M}(x_t - d_t)^2. \tag{8.1.7}$$

Отметим, что если $d_t \neq \hat{x}_t$, то $\widetilde{D}_t \neq \mathrm{M}K_t$.

8.1.2. Дифференциальные уравнения для средних квадратов ошибок. Рассмотрим вначале общий случай [53], когда наблюдаемый процесс равен (7.3.1), при этом находится оценка $\hat{f}_t$ (7.3.9).

Представим апостериорную дисперсию

$$K_t = \mathrm{M}[(f(x_t, \overline{y}_t, t) - \widehat{f}_t)^2 \mid y_0^t] = \mathrm{M}[f^2(x_t, \overline{y}_t, t) \mid y_0^t] - \widehat{f}_t^2$$

и средний квадрат ошибки

$$D_t = \mathrm{M}[f(x_t, \overline{y}_t, t) - \widehat{f}_t]^2 = \mathrm{M}K_t \tag{8.1.8}$$

в дифференциальной форме:

$$d^*K_t = d^*\mathrm{M}[f^2(x_t, \overline{y}_t, t) \mid y_0^t] - d^*\widehat{f}_t^{\,2}; \tag{8.1.9}$$

$$dD_t = \mathrm{M}[d^*f^2(x_t, \overline{y}_t, t) + d^*\widehat{f}_t^{\,2} - 2d^*f(x_t, \overline{y}_t, t)\,\widehat{f}_t)].$$

Входящие в эти соотношения стохастические дифференциалы понимаются в смысле Ито. Можно записать уравнения (9) с использованием и симметризованных стохастических дифференциалов. Однако анализ их усложнится.

Применяя обобщенную формулу дифференцирования (7.3.17), получаем

$$d^*f^2(x_t, \overline{y}_t, t) = 2f(x_t, \overline{y}_t, t)\, d^*f(x_t, \overline{y}_t, t) + d\langle f, f\rangle_t;$$

$$d^*\widehat{f}_t^{\,2} = 2\widehat{f}_t d^*\widehat{f}_t + d\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle_t;$$

$$d^*(f(x_t, \overline{y}_t, t)\,\widehat{f}_t) = \widehat{f}_t d^*f(x_t, \overline{y}_t, t) + f(x_t, \overline{y}_t, t)\, d^*\widehat{f}_t + d\langle f, \widehat{f}\rangle_t,$$

где стохастические дифференциалы $d^*f(x_t, \overline{y}_t, t)$ и $d^*\widehat{f}_t$ определены соотношениями (7.3.17′) и (7.3.22) соответственно; $\langle f, f\rangle_t$, $\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle_t$ $\langle f, \widehat{f}\rangle_t$ — возрастающие процессы, определяемые по мартингальным частям процессов $f(x_t, \overline{y}_t, t)$ и $\widehat{f}_t$. Из (7.3.17′) и (7.3.22) имеем

$$d\langle f, f\rangle_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 d\langle x_1, x_1\rangle_t + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 d\langle \omega, \omega\rangle_t + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\, d\langle \omega, x_1\rangle_t;$$

$$d\langle \widehat{f}, \widehat{f}\rangle_t = \frac{1}{N}\left\{\mathrm{M}[f(x_t, \overline{y}_t, t)\widetilde{S}_t \mid y_0{}^t] + \mathrm{M}\left[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\middle| y_0{}^t\right] + N\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\middle| y_0{}^t\right]\right\}^2 dt,$$

$$d\langle f, \widehat{f}\rangle_t = \left\{\mathrm{M}[f(x_t, \overline{y}_t, t)\widetilde{S}_t \mid y_0{}^t] + \mathrm{M}\left[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\middle| y_0{}^t\right] + \right.$$
$$\left. + N\mathrm{M}\left[\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\middle| y_0{}^t\right]\right\}\left(\frac{C_t}{N}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\right) dt.$$

Подставляя эти соотношения в (9) и используя свойства интеграла Ито, можно получить дифференциальные уравнения для D_t и для K_t. В частности, имеем

$$dD_t = 2\mathrm{M}\Big[\tilde{f}_t\Big\{\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}dt + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}dx_{2t} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{y}}S(x_t, t)\,dt + \frac{N}{2}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\bar{y}^2}dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x^2}d\langle x_1, x_1\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\bar{y}}d\langle\omega, x_1\rangle_t - \frac{1}{N}\Big(\mathrm{M}[f(x_t, \bar{y}_t, t)\tilde{S}_t\,|\,y_0^t] +$$

$$+ \mathrm{M}\Big[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\Big|\,y_0^t\Big] + N\mathrm{M}\Big[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big|\,y_0^t\Big]\Big)\tilde{S}_t\,dt\Big\} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 d\langle x_1, x_1\rangle_t +$$

$$+ \frac{N}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big)^2 dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}d\langle\omega, x_1\rangle_t + \frac{1}{2N}\Big\{\mathrm{M}[f(x_t, \bar{y}_t, t)\tilde{S}_t\,|\,y_0^t] +$$

$$+ \mathrm{M}\Big[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\Big|\,y_0^t\Big] + N\mathrm{M}\Big[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big|\,y_0^t\Big]\Big\}^2 dt - \Big\{\mathrm{M}[f(x_t, \bar{y}_t, t)\tilde{S}_t|y_0^t] +$$

$$+ \mathrm{M}\Big[C_t\frac{\partial f}{\partial x}\Big|\,y_0^t\Big] + N\mathrm{M}\Big[\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big|\,y_0^t\Big]\Big\}\Big(\frac{C_t}{N}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big)dt\Big], \qquad (8.1.10)$$

где $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} - \mathrm{M}\Big[\frac{\partial f}{\partial t}\Big|\,y_0^t\Big]$, $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}dx_{2t} = \frac{\partial f}{\partial x}dx_{2t} - \mathrm{M}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}dx_{2t}\,|\,y_0^t\Big]$ и т. д.

Конкретизируем это уравнение для случая фильтрации диффузионного марковского процесса x_t в белом шуме. С учетом (7.3.27), (7.3.28), получаем

$$\dot{D}_t = 2\mathrm{M}\Big[(a(x_t, t) - \hat{a}_t)(x_t - \hat{x}_t) - \frac{1}{N}(\widehat{x_t^2} - \hat{x}_t^2)(x_t - \hat{x}_t)^2\Big] + \mathrm{M}\,b(x_t, t) +$$

$$+ \frac{1}{N}\mathrm{M}[(\widehat{x_t^2} - \hat{x}_t^2)^2], \qquad (8.1.11)$$

где $\widehat{x_t^2} - \hat{x}^2_t = K_t$ — апостериорная дисперсия.

В том частном случае, когда марковский процесс x_t является гауссовским с коэффициентом переноса $a(x_t, t) = -\gamma x_t$ и коэффициентом диффузии $b(x_t, t) = \varkappa$, уравнение (11) принимает вид

$$\dot{D}_t = -2\gamma D_t + \varkappa + \frac{1}{N}\mathrm{M}[K_t^2] - \frac{2}{N}\mathrm{M}[K_t(x_t - \hat{x}_t)^2]. \qquad (8.1.12)$$

В рассматриваемом случае апостериорная дисперсия совпадает со средним квадратом ошибки. Действительно, используя общее соотношение (7.3.22) и правила дифференцирования Ито, запишем уравнение для процесса $K_t = \widehat{x_t^2} - \hat{x}_t^2$. В интегральной форме оно имеет вид

$$\widehat{x_t^2} - \hat{x}_t^2 = \frac{1}{N}\int_0^t\{\mathrm{M}[(x_\tau - \hat{x}_\tau)x_\tau^2\,|\,y_0^\tau] - 2\hat{x}_\tau\mathrm{M}[x_\tau(x_\tau - \hat{x}_\tau)\,|\,y_0^\tau]\}\,d^*\tilde{\omega}_\tau -$$

$$-\int_0^t 2\gamma(\widehat{x_\tau^2} - \hat{x}_\tau^2)\,d\tau + \varkappa t - \frac{1}{N}\int_0^t(\widehat{x_\tau^2} - \hat{x}_\tau^2)^2\,d\tau + \widehat{x_0^2} - \hat{x}_0^2. \qquad (8.1.13)$$

В гауссовском случае

$$\mathbf{M}[x_t^2(x_t-\hat{x}_t)\,|\,y_0^t]=2\hat{x}_t\,(\widehat{x_t^2}-\hat{x}_t^2),$$

поэтому стохастический интеграл в (13) обращается в нуль. Таким образом из (13) получаем уравнение

$$\dot{K}_t=-2\gamma K_t-\frac{K_t^2}{N}+\varkappa,\quad K_0=\mathrm{const}, \tag{8.1.14}$$

которое не содержит стохастических величин. Отсюда и из (8) вытекает, что $K_t=D_t$, при этом уравнение (12) совпадает с (14). Решение этого уравнения дает средний квадрат ошибки оптимальной фильтрации.

Изложенный здесь прямой метод определения средних квадратов ошибок позволяет осуществлять анализ как оптимальных, так и неоптимальных систем фильтрации. В последующем случае потребуется найти уравнение для $\widetilde{D}_t$ (7), используя, в частности, уравнение для неоптимальной оценки d_t (подобная задача рассматривается в п. 12.4.2).

В случае оптимальных систем фильтрации, формирующих АПВ (или заменяющие ее параметры), задача анализа систем, по существу, решается уже на этапе синтеза. Например, в случае фильтрации марковского гауссовского сигнала в белом шуме оптимальная система определяется уравнениями (4.3.12), (4.3.13), которые содержат $h_t=1/K_t$ — величину, обратную апостериорной дисперсии. Решение h_t (4.3.21) уравнения (4.3.12) нам понадобилось в п. 4.3.2 для того, чтобы определить параметры фильтра. Но это же решение дает и средний квадрат ошибки оптимальной фильтрации: $D_t=K_t=1/h_t$ ($D_0=K_0=1/h_0=\mathrm{const}$). В стационарном режиме согласно (4.3.22) средний квадрат ошибки равен постоянной величине

$$D=N\gamma\,(\sqrt{1+2\sigma^2/N\gamma}-1),\qquad \sigma^2=\varkappa/2\gamma.$$

Если решается задача асимптотически оптимальной фильтрации, например в гауссовском приближении, то качество работы систем описывается приближенно величинами апостериорных дисперсий, последние определяются уравнениями (6.1.25), (6.1.31). При этом средние квадраты ошибок фильтрации можно получить согласно (6) путем усреднения апостериорных дисперсий.

8.1.3. Случай зависимых сигналов и шумов [54]. Предыдущие общие уравнения позволяют решать задачи как при независимых, так и при зависимых сигналах и шумах. В случае существования статистической зависимости между полезным сигналом и белым шумом в задаче фильтрации возникает ряд особенностей; с целью их выявления проанализируем несколько конкретных примеров.

а) Рассмотрим задачу фильтрации диффузионного марковского процесса x_t по результатам наблюдения $\bar{y}_t$, причем x_t и $\bar{y}_t$ заданы системой стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} d^*x_t&=a(x_t,t)\,dt+\sqrt{b(x_t,t)}\,dv_t,\quad t\in[0,T],\\ d\bar{y}_t&=S(x_t,t)\,dt+\sqrt{N(t)}\,d\omega_t, \end{aligned} \tag{8.1.15}$$

где $S(x_t,t)$ — полезный сигнал ($S(\cdot,\cdot)$ — детерминированная функция), v_t и ω_t — стандартные винеровские процессы, для которых

$$\mathbf{M}[dv_t d\omega_t\,|\,v_t=v,\quad \omega_t=\omega]=\delta\,dt,\quad 0\leqslant\delta\leqslant 1;$$

δ — коэффициент, характеризующий степень взаимосвязи процессов ω_t и v_t (случай $\delta=1$, при котором ω_t и v_t совпадают, будем называть сильной взаимосвязью).

Взаимосвязь ненаблюдаемого и наблюдаемого процессов будем характеризовать локальным коэффициентом взаимной диффузии C_t, определяемым соотношением

$$C_t\,dt = \mathrm{M}\,[d^*x_t d\bar{y}_t \mid x_t = x,\ y_t = y] = \delta\sqrt{N(t)\,b(x,t)}\,dt. \qquad (8.1.16)$$

Конкретизируя уравнения (7.3.22) и (10) для рассматриваемого случая, получим

$$d^*\hat{x}_t = \frac{1}{N(t)}K_{pst}(d\bar{y}_t - \hat{S}_t dt) + \hat{a}_t dt,$$

$$\dot{D}_t = 2\mathrm{M}\left\{(x_t - \hat{x}_t)\left[a(x_t,t) - \hat{a}_t - \frac{1}{N(t)}K_{pst}(S(x_t,t) - \hat{S}_t)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N(t)}K^2_{pst} - \frac{C_t}{N(t)}K_{pst}\right\} + \mathrm{M}\,[b(x_t,t)], \qquad (8.1.17)$$

где $K_{pst} = \mathrm{M}\,\{x_t\,[S(x_t,t) - \hat{S}_t] \mid y_0^t\} + \hat{C}_t$; знак $\wedge$ используется для обозначения БСО, т. е. $\hat{a}_t = \mathrm{M}\,[a(x_t,t) \mid y_0^t]$, и т. д.

Если же ω_t и v_t статистически независимы друг от друга, то уравнения оптимальной фильтрации принимают вид

$$d^*\hat{x}_t = \frac{1}{N(t)}\tilde{K}_{pst}(dy_t - \hat{S}_t dt) + \hat{a}_t dt,$$

$$\dot{D}_t = 2\mathrm{M}\left\{(x_t - \hat{x}_t)\left[a(x_t,t) - \hat{a}_t - \frac{1}{N(t)}\tilde{K}_{pst}(S(x_t,t) - \hat{S}_t)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{N(t)}\mathrm{M}\,[\tilde{K}^2_{pst}] + \mathrm{M}\,[b(x_t,t)], \qquad (8.1.18)$$

где $\tilde{K}_{pst} = \mathrm{M}\,\{x_t, [S(x_t,t) - \hat{S}_t] \mid y_0^t\}$.

Сравнение уравнений (18) и (17) показывает, что учет взаимосвязи ω_t и v_t привел к появлению дополнительных членов, в частности, $\hat{C}_t(d\bar{y}_t - \hat{S}_t dt)/N(t)$ в уравнении для оценки $\hat{x}_t$ и $2\mathrm{M}[C_t\hat{C}_t]/N(t)$ и т. д. в уравнении для среднего квадрата ошибки D_t.

б) Уравнения (17), (18) достаточно сложны для анализа, поэтому рассмотрим более простой пример — фильтрацию марковского гауссовского процесса, когда

$$S(x_t,t) = x_t, \quad a(x_t,t) = a(t)\,x_t, \quad b(x_t,t) = b(t).$$

Уравнения (17) в этом случае принимают вид

$$d^*\hat{x}_t = \frac{1}{N(t)}\left[K_t + \delta\sqrt{N(t)\,b(t)}\right](d\bar{y}_t - \hat{x}_t dt) + a(t)\,\hat{x}_t dt, \qquad (8.1.19)$$

$$\dot{D}_t = 2\left[a(t) - \delta\sqrt{\frac{b(t)}{N(t)}}\right]D_t + \frac{1}{N(t)}\mathrm{M}\,[K_t^2] -$$

$$- \frac{2}{N(t)}\mathrm{M}\,[K_t(x_t - \hat{x}_t)^2] + b(t)\,(1 - \delta^2), \qquad (8.1.20)$$

где $K_t = \widehat{x_t^2} - \hat{x}_t^2$ — апостериорная дисперсия. (При записи (19), (20) учтено, что $\hat{C}_t = C_t = \delta\sqrt{b(t)\,N(t)}$.)

Найдем теперь апостериорную дисперсию, необходимую для расчета (20). Используя (7.3.22), (19) и правило дифференцирования Ито, запишем уравнения для процессов $\widehat{x_t^2}$ и $\widehat{x}_t^2$

$$d^*\widehat{x_t^2}=\frac{1}{N(t)}\{M[x_t^2(x_t-\widehat{x}_t)\,|\,y_0^t]+2\delta\sqrt{b(t)N(t)}\,\widehat{x}_t\}(d\bar{y}_t-\widehat{x}_t dt)+$$

$$+2a(t)\widehat{x_t^2}dt+b(t)\,dt,$$

$$d^*\widehat{x}_t^2=\frac{2\widehat{x}_t}{N(t)}\{M[x_t(x_t-\widehat{x}_t)\,|\,y_0^t]+\delta\sqrt{b(t)N(t)}\}(d\bar{y}_t-\widehat{x}_t dt)+$$

$$+2a(t)\widehat{x}^2dt+\frac{1}{N(t)}\{M[x_t(x_t-\widehat{x}_t)\,|\,y_0^t]+\delta\sqrt{b(t)N(t)}\}^2dt.$$

Поскольку в рассматриваемом гауссовском случае

$$M[x_t^2(x_t-\widehat{x}_t)|y_0^t]=2\widehat{x}_tM[x_t(x_t-\widehat{x}_t)\,|\,y_0^t]=2\widehat{x}_tK_t,$$

то уравнение для апостериорной дисперсии принимает вид

$$d^*K_t=d^*\widehat{x_t^2}-d^*\widehat{x}_t^2=2a(t)K_tdt+b(t)(1-\delta^2)\,dt-2\delta\sqrt{\frac{b(t)}{N(t)}}K_tdt-$$

$$-\frac{K_t^2}{N(t)}dt,\quad K_0=\text{const}. \qquad (8.1.21)$$

Это уравнение не является стохастическим. Отсюда и из (6) следует, что $K_t=D_t$, при этом уравнение (20) совпадает с (21):

$$\dot{D}_t=2\left[a(t)-\delta\sqrt{\frac{b(t)}{N(t)}}\right]D_t-\frac{1}{N(t)}D_t^2+b(t)(1-\delta^2),\quad D_0=\text{const}. \qquad (8.1.22)$$

Поведение среднего квадрата ошибки фильтрации описывается уравнением Риккати. Однако в случае сильной взаимосвязи ($\delta=1$) соотношение (22) принимает вид

$$\dot{D}_t=2\left[a(t)-\sqrt{\frac{b(t)}{N(t)}}\right]D_t-\frac{1}{N(t)}D^2_t, \qquad (8.1.22')$$

т. е. переходит в уравнение Бернулли.

Соотношения (19) и (22′) определяют структуру нестационарного фильтра. Когда $b(t)$, $N(t)$ обращаются в положительные константы b, N и $a(t)=-\gamma$ (экспоненциально-коррелированный гауссовский процесс), для (22′) можно записать точное решение:

$$D_t=-\frac{2N(\gamma+\sqrt{b/N})}{1+h\exp\{2(\gamma+\sqrt{b/N})\,t\}}, \qquad (8.1.23)$$

где

$$h=-\frac{2N}{D_0}\left(\gamma+\sqrt{\frac{b}{N}}\right)-1.$$

После завершения переходных процессов, длительность которых зависит от отношения сигнал/шум, можно рассматривать установившееся состояние фильтра. Из (23) нетрудно получить, что стационарное значение среднего квадрата ошибки $D=\lim\limits_{t\to 0}D_t=0$.

Из (23) также следует, что при известном начальном значении $x(0)$ ненаблюдаемого процесса, когда $D_0=0$, средний квадрат ошибки фильтрации $D_t=0$ при любом t. Это свидетельствует о том, что мы имеем дело с сингулярным (вырожденным) случаем в фильтрации.

в) Рассмотрим теперь случай линейной фильтрации при $\delta<1$. Это соответствует, например, следующей ситуации:

$$\begin{aligned} d\bar{y}_t &= x_t dt + \sqrt{N}\, dv_t + \sqrt{e}\, du_t, \\ dx_t &= -\gamma x_t dt + \sqrt{b}\, dv_t, \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

где $\mathbf{M}(du_t dv_t)=0$); N, e, γ, b — положительные константы. Если объединить стандартные винеровские процессы v_t и u_t, как это сделано в (15), то нужно положить

$$d\omega_t = \frac{1}{\sqrt{N+e}}(\sqrt{N}\, dv_t + \sqrt{e}\, du_t); \qquad \delta = \sqrt{\frac{N}{N+e}}.$$

При этом для сильной взаимосвязи $e=0$, $\delta=1$; при отсутствии взаимосвязи $N=0$, $\delta=0$.

Из (22) следует, что дисперсию ошибки оптимальной фильтрации в условиях (24) можно найти из решения уравнения

$$\dot{D}_t = -2[\gamma + \sqrt{Nb}/(N+e)]\, D_t - D^2{}_t/(N+e) + b[1 - N/(N+e)].$$

Это соотношение является дифференциальным уравнением Риккати и имеет ненулевое стационарное решение

$$D_{\text{ст}} = \sqrt{[\gamma + \sqrt{Nb}/(N+e)]\,(N+e) + be} - [\gamma + \sqrt{Nb}/(N+e)]\,(N+e).$$

Как видим, качество фильтрации в сильной степени зависит от взаимосвязи сигнала и мешающего шума.

Отметим, что наличие взаимосвязи может быть неизвестно наблюдателю. Тогда оценивание процесса x_t естественно производить оптимальным фильтром для случая независимых ω_t и v_t:

$$d\hat{x}_t = \frac{D_t}{N+e}(d\bar{y}_t - \hat{x}_t dt) - \gamma \hat{x}_t dt, \tag{8.1.25}$$

$$\dot{D}_t = -2\gamma D_t + b - D^2{}_t/(N+e), \tag{8.1.26}$$

вытекающим из (18). В условиях, когда ω_t и v_t статистически зависимы, этот алгоритм уже не является оптимальным. При этом величина D_t, определяемая из (26), не совпадает со средним квадратом ошибки фильтрации.

Найдем средний квадрат ошибки фильтрации

$$\tilde{D}_t = \mathbf{M}(x_t - \tilde{x}_t)^2$$

для случая, когда ω_t и v_t взаимосвязаны, но оценивание производится фильтром (25), (26) ($\tilde{x}_t$ — результат фильтрации). Расчет для стационарного режима приводит к следующему результату:

$$\tilde{D}_{\text{ст}} = D'_{\text{ст}}[1 - \delta\sqrt{2q/(1+2q)}],$$

где $\delta = \sqrt{N/(N+e)}$; $\quad \tilde{D}_{\text{ст}} = \lim\limits_{t\to\infty} \tilde{D}_t$;

$$D'_{\text{ст}} = \sqrt{\gamma^2(N+e)^2 + (N+e)\,b} - \gamma(N+e)$$

— стационарное значение параметра D_t неоптимального фильтра; $q=\sigma^2/\gamma(N+e)$ — отношение сигнал/шум; $\sigma^2=b/2\gamma$ — дисперсия сигнала.

Расчет показывает, что $D_{ст} < \tilde{D}_{ст} < D'_{ст}$. Так, если $\gamma = e = N = 1$, $b = 4$ отношение $D_{ст}/D_{ст} \cong 1{,}3$, $D'_{ст}/\tilde{D}_{ст} \cong 2{,}3$. Таким образом, незнание о существовании взаимосвязи между процессами v_t и ω_t и, как следствие этого, использование фильтра (25), (26) приводит к значительному снижению точности фильтрации.

8.2. АНАЛИЗ ОБНАРУЖЕНИЯ

8.2.1. Рекуррентные соотношения для апостериорных вероятностей ошибок. Качество обнаружения (см. п.2.2.7) можно охарактеризовать, например, при помощи среднего риска. Средний же риск определяется в результате усреднения апостериорного риска. Нетрудно убедиться, что минимальный апостериорный риск, соответствующий байесовскому решающему правилу обнаружения при наблюдении $y_1, \ldots, y_n$, имеет вид

$$R_n(y_1^n) = c(1,\ d_0)\,[1 - v(l_n - h')]\,\frac{l_n}{1 + l_n} + \\ + c(0,\ d_1)\,v(l_n - h')\,\frac{1}{1 + l_n}. \qquad (8.2.1)$$

Здесь $c(1, d_0)$, $c(0, d_1)$ — составляющие матрицы потерь $\|c(i, d_i)\|$, $i = 0$, 1 (потери за правильные решения полагаются равными нулю); v — импульсная функция

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases} \qquad (8.2.2)$$

l_n — отношение апостериорных вероятностей (см. (4.1.8)) наличия и отсутствия сигнала в наблюдаемых данных, h' — порог обнаружения, связанный с порогом h (2.2.7) через априорные вероятности наличия (p_1) и отсутствия (p_0) сигнала

$$h' = (p_1/p_0)\,h. \qquad (8.2.3)$$

Усреднение риска (1) целесообразно проводить последовательным образом при помощи рекуррентного соотношения

$$R_k(y_1^k) = \mathrm{M}\,[R_{k+1}(y_1^{k+1}) \mid y_1^k] = \int R_{k+1}(y_1^{k+1})\,p(y_{k+1} \mid y_1^k)\,dy_{k+1}, \\ k = n-1, \ldots, 0. \qquad (8.2.4)$$

Для упрощения процедуры апостериорного усреднения целесообразно перейти к достаточным статистикам l_k, $\mathbf{w}_k$ (см. п. 4.1.4), при которых

$$p(y_{k+1} \mid y_1^k) = p(y_{k+1} \mid l_k,\ \mathbf{w}_k). \qquad (8.2.5)$$

Найдем эту условную плотность вероятностей применительно к задаче, поставленной в п. 4.1.1. Используя (4.1.10) и учитывая, что

$$p(y_{k+1} \mid y_1^k) = \sum_{\theta} p(y_{k+1},\ \theta \mid y_1^k),$$

получим

$$p(y_{k+1} \mid l_k, \mathbf{w}_k) = \frac{l_k}{1 + l_k} \iint \rho\,[y_{k+1} - S(x_{k+1})] \times \\ \times \pi(x_{k+1} \mid x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1} + \frac{1}{1 + l_k}\,\rho(y_{k+1}). \qquad (8.2.6)$$

Принимая во внимание (4.1.11), распределение (6) можно записать

$$p(y_{k+1}\,|\,l_k,\ \mathbf{w}_k)=\frac{1+l_{k+1}(y_{k+1},\ l_k,\ \mathbf{w}_k)}{1+l_k}\,\rho(y_{k+1}). \tag{8.2.7}$$

В пространстве достаточных статистик соотношение (4) примет вид

$$R_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)=\int R_{k+1}(l_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1})\,p(y_{k+1}\,|\,l_k,\ \mathbf{w}_k)\,dy_{k+1}. \tag{8.2.8}$$

Используя (8), рекуррентные соотношения для достаточных статистик, а также (7), можно последовательным образом найти минимальный средний риск R_0, который характеризует качество оптимального обнаружения.

Однако данный способ описания качества обнаружения не очень нагляден. Это качество удобнее характеризовать вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода (2.2.8), (2.2.9). Последние целесообразно использовать еще и потому, что они позволяют описать качество обнаружения как для байесовской, так и для небайесовской задачи.

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода характеризуют ошибочные решения:

$$\alpha=P(\delta(y_1^n)=d_1\,|\,\theta=0);$$
$$\beta=P(\delta(y_1^n)=d_0\,|\,\theta=1). \tag{8.2.9}$$

Рассмотрим апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода α_k, β_k [126], которые имеют следующий смысл: $\alpha_k\equiv\alpha_k(y_1^k)$ — вероятность вынести решение d_1 в конце процедуры обнаружения (в момент времени t_n) при условии, что $\theta=0$ и принята определенная последовательность наблюдаемых данных $y_1,\ \ldots,\ y_k$; $\beta_k\equiv\beta_k(y_1^k)$ — вероятность вынести решение d_0 (в момент времени t_n) при условии, что $\theta=1$ и приняты данные $y_1,\ \ldots,\ y_k$. Коротко можно записать

$$\alpha_k=P(\delta(y_1^n)=d_1\,|\,\theta=0,\ y_1^k);\quad \beta_k=P(\delta(y_1^n)=d_0\,|\,\theta=1,\ y_1^k), \tag{8.2.10}$$

или в пространстве достаточных статистик

$$\alpha_k=P(\delta(y_1^n)=d_1\,|\,\theta=0,\ l_k,\ \mathbf{w}_k)=\alpha_k(l_k,\ \mathbf{w}_k);$$
$$\beta_k=P(\delta(y_1^n)=d_0\,|\,\theta=1,\ l_k,\ \mathbf{w}_k)=\beta_k(l_k,\ \mathbf{w}_k). \tag{8.2.11}$$

Апостериорный риск $R_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)$ можно представить с использованием (11) в следующем виде:

$$R_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)=c(1,\ d_0)\,\beta_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)\frac{l_k}{1+l_k}+$$
$$+c(0,\ d_1)\,\alpha_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)\frac{1}{1+l_k}. \tag{8.2.12}$$

Подставляя (7) и (12) в (8), получим

$$c(1,\ d_0)\,\beta_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)\,l_k+c(0,\ d_1)\,\alpha_k(l_k,\ \mathbf{w}_k)=$$
$$=c(1,\ d_0)\int\beta_{k+1}(l_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1})\,l_{k+1}\rho(y_{k+1})\,dy_{k+1}+$$
$$+c(0,\ d_1)\int\alpha_{k+1}(l_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1})\,\rho(y_{k+1})\,dy_{k+1}.$$

Это выражение эквивалентно рекуррентным соотношениям для апостериорных вероятностей ошибок

$$\alpha_k(l_k,\ \mathbf{w}_k) = \int \alpha_{k+1}(l_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1})\,\rho(y_{k+1})\,dy_{k+1};$$

$$\beta_k(l_k,\ \mathbf{w}_k) = \int \beta_{k+1}(l_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1})\,J_{k+1}(y_{k+1},\ \mathbf{w}_k)\,\rho(y_{k+1})\,dy_{k+1},$$

$$k = n-1,\ \ldots,\ 0, \qquad (8.2.13)$$

где $J_{k+1}(y_{k+1},\ \mathbf{w}_k) = l_{k+1}/l_k$ конкретизируется при помощи (4.1.11). (Соотношения (13) можно получить и без обращения к апостериорному риску.)

Из (1) и (12) следует, что апостериорные вероятности ошибок в конечный момент времени обнаружения равны

$$\alpha_n = v(l_n - h'); \qquad \beta_n = 1 - v(l_n - h'). \qquad (8.2.14)$$

Используя эти «начальные» (по отношению к обратному времени) условия и рекуррентные соотношения для достаточных статистик, можно последовательным образом при помощи (13) получить обычные вероятности ошибок (9):

$$\alpha \equiv \alpha_0 = \alpha_0(l_0,\ \mathbf{w}_0); \qquad \beta \equiv \beta_0 = \beta_0(l_0,\ \mathbf{w}_0), \qquad (8.2.15)$$

где l_0, $\mathbf{w}_0$ — начальные значения достаточных статистик, определяемые априорными данными. Здесь предполагается, что начальные условия l_0, $\mathbf{w}_0$ нерандомизированы. В противном случае для вычисления обычных вероятностей ошибок потребовалось бы дополнительное усреднение:

$$\alpha = \int \ldots \int \alpha_0(l_0,\ \mathbf{w}_0)\,p(l_0,\ \mathbf{w}_0)\,dl_0 d\mathbf{w}_0;$$

$$\beta = \int \ldots \int \beta_0(l_0,\ \mathbf{w}_0)\,p(l_0,\ \mathbf{w}_0)\,dl_0 d\mathbf{w}_0,$$

где $p(l_0, \mathbf{w}_0)$ — плотность вероятностей начальных условий.

Рекуррентные соотношения (13) для апостериорных вероятностей ошибок непосредственно обобщаются и на случай коррелированных помех (см. [89]).

Если в качестве достаточных статистик выбрать Λ_k, $\mathbf{w}_k$, то будут справедливы аналогичные рекуррентные соотношения для апостериорных вероятностей ошибок; применительно к общему случаю их можно записать следующим образом:

$$\alpha_k(\Lambda_k,\ \mathbf{w}_k) = \mathrm{M}\,[\alpha_{k+1}(\Lambda_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1}) \mid \theta = 0,\ \Lambda_k,\ \mathbf{w}_k];$$

$$\beta_k(\Lambda_k,\ \mathbf{w}_k) = \mathrm{M}\,[\beta_{k+1}(\Lambda_{k+1},\ \mathbf{w}_{k+1}) \mid \theta = 1,\ \Lambda_k,\ \mathbf{w}_k]. \qquad (8.2.16)$$

Начальные условия для (16) аналогичны (14):

$$\alpha_n = v(\Lambda_n - h),\ \beta_n = 1 - v(\Lambda_n - h), \qquad (8.2.17)$$

причем порог h связан с h' соотношением (3) (при байесовской постановке задачи).

8.2.2. Дифференциальные уравнения для апостериорных вероятностей ошибок. Рассмотрим теперь случай, когда принимаемый процесс $\{y_t\}$ протекает в непрерывном времени, причем наблюдение ведется в течение отрезка $[0,\ T]$. Для исследования качества процедуры обна-

ружения введем апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода (аналогично случаю дискретного времени, см. (10))

$$\alpha_t = P(\delta(y_0^T) = d_1 \mid \theta = 0, \ y_0^t);$$

$$\beta_t = P(\delta(y_0^T) = d_0 \mid \theta = 1, \ y_0^t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{8.2.18}$$

— апостериорные вероятности принятия в заключительный момент времени T ошибочных решений. Перейдем к достаточным статистикам, которые обозначим через $z_t = \{z_{1t}, \ldots, z_{lt}\}$. Как и в случае дискретного времени, одна из статистик, например z_{1t}, должна совпадать с ЛП z_t (или с ОП), а остальные статистики $z_{2t}, \ldots, z_{lt}$ являются достаточными статистиками фильтрации (см. п. 4.1.4). Апостериорные вероятности ошибок будут функциями достаточных статистик

$$\alpha_t = \alpha(z_{1t}, \ldots, z_{lt}, t), \quad \beta_t = \beta(z_{1t}, \ldots, z_{lt}, t). \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{8.2.19}$$

Для этих функций, взятых в соседние моменты времени t и $t+\Delta$, справедливы соотношения типа (16):

$$\alpha(z_{1t}, \ldots, z_{lt}, t) = M[\alpha(z_{1, t+\Delta}, \ldots, z_{l, t+\Delta}, t+\Delta) \mid \theta = 0, \ z_{1t}, \ldots, z_{lt}];$$

$$\beta(z_{1t}, \ldots, z_{lt}, t) = M[\beta(z_{1, t+\Delta}, \ldots, z_{l, t+\Delta}, t+\Delta) \mid \theta = 1, \ z_{1t}, \ldots, z_{lt}]. \tag{8.2.20}$$

Разложим $\alpha(z_{1, t+\Delta}, \ldots, z_{l, t+\Delta}, t+\Delta)$ и $\beta(z_{1, t+\Delta}, \ldots, z_{l, t+\Delta}, t+\Delta)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(z_{1,t}, \ldots, z_{l,t}, t)$. Затем, поделив каждую из частей равенств (20) на Δ, перейдем к пределу при $\Delta \to 0$, рассматривая тот случай, когда достаточные статистики образуют l-мерный непрерывный марковский процесс. В результате получим уравнения параболического типа

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} A_i^0(\mathbf{z}, t) \frac{\partial \alpha_t}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{l} B^0_{ij}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 \alpha_t}{\partial z_i \partial z_j} = 0;$$

$$\frac{\partial \beta_t}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} A_i^1(\mathbf{z}, t) \frac{\partial \beta_t}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{l} B^1_{ij}(z, t) \frac{\partial^2 \beta_t}{\partial z_i \partial z_j} = 0, \tag{8.2.21}$$

где

$$A_i^\nu(\mathbf{z}, t) = \lim_{\Delta \to 0} M\left[\frac{\Delta z_i}{\Delta} \middle| \theta = \nu, \ \mathbf{z}_t = \mathbf{z}\right], \quad \nu = 0, \ 1;$$

$$\mathrm{B}_{ij}^\nu(\mathbf{z}, t) = \lim_{\Delta \to 0} M\left[\frac{\Delta z_i \Delta z_j}{\Delta} \middle| \theta = \nu, \quad \mathbf{z}_t = \mathbf{z}\right], \tag{8.2.22}$$

$$\Delta z_i = z_{i, t+\Delta} - z_{it}; \ i, \ j = 1, \ldots, l.$$

Уравнения (21) описывают изменение апостериорных вероятностей ошибок (19) при обратном течении времени (от T до 0). Эти уравнения необходимо дополнить «начальными» условиями (типа (17)), которым должны удовлетворять апостериорные вероятности ошибок в момент времени T

$$\alpha_T = v(z_1 - \ln h); \quad \beta_T = 1 - v(z_1 - \ln h). \tag{8.2.23}$$

Обычные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода α, β, непосредственно характеризующие качество обнаружения, связаны с апостериорными вероятностями ошибок при помощи соотношений, аналогичных (15)

$$\alpha \equiv \alpha_0 = \alpha(z_{10}, \dots, z_{l0}, 0); \quad \beta \equiv \beta_0 = \beta(z_{10}, \dots, z_{l0}, 0). \qquad (8.2.24)$$

Здесь $z_{10}, \dots, z_{l0}$ — начальные нерандомизированные значения достаточных статистик.

Коэффициенты A_i^0, A_i^1, B_{ij}^0, B_{ij}^1, входящие в (21), являются функциями достаточных статистик, число (l) и вид которых определяются конкретной задачей. Эти коэффициенты находятся при помощи (22) и уравнений для достаточных статистик; последние же определяются соответствующими уравнениями совместного обнаружения и оценивания, полученными в предыдущих главах.

Отметим, что поскольку достаточные статистики $\mathbf{z}_t$ связаны с апостериорными дисперсиями фильтруемых процессов, то вероятности ошибок обнаружения оказываются функционально связанными с ошибками оценивания. Таким образом, излагаемые методы решения задач приема сигналов характеризуются тесной взаимосвязью задач обнаружения и оценивания как на этапе синтеза, так и на этапе анализа.

Рассмотрим пример. Конкретизируем уравнения для апостериорных вероятностей ошибок применительно к задаче обнаружения марковского гауссовского сигнала в белом шуме (синтез проведен в п. 4.3.2). В рассматриваемом случае достаточные статистики состоят из двух компонент $\mathbf{z}_t = \{z_t, m_t\}$, которые определяются уравнениями (4.3.13), (4.3.15). Используя эти уравнения, конкретизируем формулы (22); в результате уравнения (21) примут вид

$$\frac{\partial\alpha_t}{\partial t} - \frac{m^2}{2N}\frac{\partial\alpha_t}{\partial z} - m\left(\gamma + \frac{1}{Nh_t}\right)\frac{\partial\alpha_t}{\partial m} + \frac{m^2}{2N}\frac{\partial^2\alpha_t}{\partial z^2} + \frac{m}{Nh_t}\frac{\partial^2\alpha_t}{\partial z\partial m} + \frac{1}{2Nh^2_t}\frac{\partial^2\alpha_t}{\partial m^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\beta_t}{\partial t} + \frac{m^2}{2N}\frac{\partial\beta_t}{\partial z} - m\gamma\frac{\partial\beta_t}{\partial m} + \frac{m^2}{2N}\frac{\partial^2\beta_t}{\partial z^2} + \frac{m}{Nh_t}\frac{\partial^2\beta_t}{\partial z\partial m} + \frac{1}{2Nh_t^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial m^2} = 0. \qquad (8.2.25)$$

Эти же уравнения получаются и путем предельного перехода в рекуррентных соотношениях для апостериорных вероятностей ошибок (п. 8.2.1) с использованием алгоритмов (4.3.11).

Функция h_t, входящая в (25), определяется формулой (4.3.21). При этом $1/h_t$ — средний квадрат ошибки оптимальной фильтрации (см. п. 8.1.2). Таким образом, из (25) видно, что апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода (и соответственно обычные вероятности ошибок обнаружения) зависят от показателя качества фильтрации $1/h_t$.

Отметим, что задача анализа оптимального приемника фильтрации решена без больших усилий: в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения (4.3.12). В то же время точный анализ оптимального обнаружителя осуществить не удается из-за трудности решения уравнений с частными производными (25). Из этого примера видно, насколько сложнее оказался анализ обнаружения по сравнению с анализом оценивания.

8.2.3. Одномерное приближение. а) Если каким-либо способом найдены решения уравнений (21) с учетом условий (23), то вероятности ошибок 1-го и 2-го рода α, β легко определяются при помощи соотношений (24). Однако аналитическое решение многомерных уравнений с частными производными (21) — весьма трудная задача. Поэтому представляет интерес разработка приближенных методов расчета вероятностей ошибок. Один из таких методов может быть дан для случая, когда время корреляции принимаемых сигналов значительно меньше времени обнаружения [108, 126].

Выделим из совокупности достаточных статистик z_t одну статистику z_t — ЛП ($z_{1t} \equiv z_t$). Как следует из предыдущего, эта статистика определяется уравнением вида

$$\dot{z}_t = \begin{cases} f_{1t} & \text{при } \theta = 1; \\ f_{0t} & \text{при } \theta = 0, \end{cases} \qquad (8.2.26)$$

где f_{1t} и f_{0t} — некоторые случайные функции, не содержащие z_t. Случайные процессы $\{z_t, \theta=0\}$ и $\{z_t, \theta=1\}$, вообще говоря, немарковские, заменим приближенно на одномерные диффузионные марковские процессы с коэффициентами переноса M_0, M_1 и диффузии K_0, K_1 соответственно. Полученным диффузионным процессам соответствует оператор вида

$$\mathscr{L} = M_\nu \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} K_\nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nu = 0, 1. \qquad (8.2.27)$$

Замена немарковского процесса на марковский будет удовлетворительной, если рассматриваемые временные интервалы значительно больше, чем время корреляции τ_{k0}, τ_{k1} случайных функций f_0, f_1 (см. (1.5.17) и [119]). Следовательно, должны быть выполнены условия

$$\tau_{k0} \ll T, \ \tau_{k1} \ll T, \qquad (8.2.28)$$

где

$$\tau_{k\nu} = \frac{\int\limits_0^\infty |\tau| K[f_\nu, f_{\nu\tau}] \, d\tau}{\int\limits_0^\infty K[f_\nu, f_{\nu\tau}] \, d\tau}, \quad \nu = 0, 1, \qquad (8.2.29)$$

а T — время обнаружения.

Здесь при помощи $K[f, f_\tau]$ обозначена корреляционная функция

$$K[f, f_\tau] = \mathrm{M}[f f_\tau] - \mathrm{M} f \mathrm{M}[f_\tau]. \qquad (8.2.30)$$

Коэффициенты M_ν, K_ν, входящие в (27), определяются соотношениями [119]

$$M_\nu = \lim_{t\to\infty} \mathrm{M} f_{\nu t}; \quad K_\nu = 2 \int\limits_0^\infty K[f_\nu, f_{\nu\tau}] \, d\tau, \quad \nu = 0, 1, \qquad (8.2.31)$$

которые эквивалентны формулам

$$M_\nu = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \mathrm{M}[z_t \mid \theta = \nu],$$

$$K_\nu = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \mathrm{M}[(z_t - \mathrm{M}[z_t \mid \theta = \nu])^2 \mid \theta = \nu], \quad \nu = 0, 1. \qquad (8.2.31')$$

Если ЛП z_t представляет собой диффузионный марковский процесс (при $\theta=0$ и 1) с известными коэффициентами переноса и диффузии, то z_t является единственной марковской достаточной статистикой в задаче определения качества обнаружения (других статистик для решения задачи не требуется). При этом апостериорные вероятности ошибок (19) зависят от одной статистики и времени. Таким образом, при выполнении условий (28) многомерные уравнения для апостериорных вероятностей ошибок можно приближенно заменить на одномерные

$$\frac{\partial\alpha_t}{\partial t}+M_0\frac{\partial\alpha_t}{\partial z}+\frac{1}{2}K_0\frac{\partial^2\alpha_t}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial\beta_t}{\partial t}+M_1\frac{\partial\beta_t}{\partial z}+\frac{1}{2}K_1\frac{\partial^2\beta_t}{\partial z^2}=0, \tag{8.2.32}$$

с постоянными коэффициентами. Начальные условия, как и раньше, определяются соотношениями (23).

Решения уравнений (32), удовлетворяющие условиям (23), имеют вид

$$\alpha(z,\ t)=1-F(u_t),\qquad \beta(z,\ t)=F(v_t), \tag{8.2.33}$$

где

$$F(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx; \tag{8.2.34}$$

$$u_t=\frac{\ln h-z-(T-t)\,M_0}{\sqrt{K_0\,(T-t)}};\qquad v_t=\frac{\ln h-z-(T-t)\,M_1}{\sqrt{K_1\,(T-t)}}. \tag{8.2.35}$$

Полученные апостериорные вероятности ошибок являются функциями параметров M_0, M_1, K_0, K_1, текущего времени t, времени обнаружения T, порога обнаружения $\ln h$ и статистики z. Из (33)—(35) и (24) с учетом начального значения ЛП $z_0=0$ получаем обычные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода

$$\alpha=\alpha(0,\ 0)=1-F(u_0);\qquad \beta=\beta(0,\ 0)=F(v_0). \tag{8.2.36}$$

где

$$u_0=(\ln h-TM_0)/\sqrt{K_0T};\qquad v_0=(\ln h-TM_1)/\sqrt{K_1T}.$$

Исключив $\ln h$ из (36), получим зависимость β от α — уравнение характеристик обнаружения:

$$\beta=F\left[-\sqrt{K_0/K_1}\,F^{-1}(\alpha)-(M_1-M_0)\sqrt{T/K_1}\right], \tag{8.2.37}$$

где F^{-1} — функция, обратная F (34).

Отметим, что уравнение такого типа было выведено в [25] другим способом — без использования дифференциальных уравнений, для вероятностей ошибок. Это совпадение результатов, полученных разными методами, объясняется тем, что в рассматриваемом асимптотическом случае, когда коэффициенты переноса и диффузии процесса $\{z_t\}$ представляют собой постоянные величины, марковский процесс $\{z_t\}$ является гауссовским. Так как коэффициенты TM_0, TK_0, TM_1, TK_1 есть приближенные средние значения и дисперсии случайной величины z_T (при $\theta=0$ и 1 соответственно), то, используя гауссовскую аппроксимацию плотностей вероятностей $p(z_T|\theta=0)$ и $p(z_T|\theta=1)$, можно получить (37).

Для удобства графической интерпретации уравнение (37) представим в следующем виде:

$$F^{-1}(\beta)+\sqrt{\frac{K_0}{K_1}}F^{-1}(\alpha)=-\frac{M_1-M_0}{\sqrt{K_1}}\sqrt{T}. \qquad (8.2.38)$$

Если на осях прямоугольной системы координат откладывать значения β и α таким образом, чтобы значения функций $F^{-1}(\beta)$ и $F^{-1}(\alpha)$ составляли равномерную шкалу, то графическая зависимость β от α будет представлена прямыми линиями.

б) Вышеприведенные формулы для расчета характеристик обнаружения относятся к случаю непрерывных процессов и непрерывного наблюдения. В дискретном же времени при расчете нужно, вообще говоря, пользоваться не дифференциальными уравнениями, а рекуррентными соотношениями, в частности (13).

Если объем выборки (n) достаточно велик, так что имеет место нормализация статистики z_n на входе порогового устройства, то расчет вероятностей ошибок упрощается. При этом достаточно вычислить математические ожидания $\mathbf{M}[z_n|\theta=\nu]$ и дисперсии $\mathbf{D}[z_n|\theta=\nu]$ указанной статистики (при $\nu=0$ и 1) и затем применить формулы гауссовской аппроксимации *). Последние приводят к уравнениям, подобным (37), (38):

$$F^{-1}(\beta)+\sqrt{\frac{\mathbf{D}(z_n|\theta=0)}{\mathbf{D}(z_n|\theta=1)}}F^{-1}(\alpha)=-\frac{\mathbf{M}(z_n|\theta=1)-\mathbf{M}(z_n|\theta=0)}{\sqrt{\mathbf{D}(z_n|\theta=1)}}. \qquad (8.2.39)$$

В некоторых случаях для приближенной оценки характеристик обнаружения достаточно вычислить лишь один параметр. Например, в асимптотическом случае приема слабых детерминированных сигналов на фоне негауссовских помех, когда обработка определяется алгоритмом (6.3.25), непосредственный расчет (см. приложение в [18]) показывает, что

$$\mathbf{M}(z_n|\theta=0)=0,$$

$$\mathbf{D}(z_n|\theta=0)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{M}\left[S(t_{k+1})\varphi_1(y_k,y_{k+1})+S(t_k)\varphi_2(y_k,y_{k+1})\right]^2\equiv\mu; \qquad (8.2.40)$$

$$\mathbf{M}(z_n|\theta=1)\approx\mu, \qquad \mathbf{D}(z_n|\theta=1)\approx\mu.$$

Таким образом, в данном случае приближенный расчет характеристик обнаружения сводится к вычислению параметра μ.

8.2.4. Сходимость ЛП к винеровскому процессу. Рассмотренная в предыдущем пункте замена немарковского процесса $\{z_t\}$ (ЛП) на одномерный марковский (см. также [119]) с постоянными коэффициентами переноса и диффузии носит приближенный характер. Эта замена и основанный на нем метод расчета характеристик обнаружения удовлетворительны для приближенной оценки качества обнаружения при выполнении (28). Строгого доказательства сходимости ЛП к указанному марковскому (винеровскому) процессу при $T/\tau_{ki}\to\infty$ не было дано. Однако сходимость (по распределению) ЛП к винеровскому процессу все же можно доказать, но при несколько иных условиях.

---

*) Для повышения точности аппроксимации можно использовать ряд Эджворта (3.2.16).

Прежде чем формулировать эти условия, кратко остановимся на двух различных типах классических предельных теорем [71], причем для простоты вначале рассмотрим схему испытаний Бернулли, когда задана последовательность сумм вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.2.41}$$

Здесь $\{x_k\}$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых с вероятностью p принимает значение 1 и с вероятностью $q=1-p$ значение 0 $(p \cdot q \neq 0)$.

Предельная теорема Муавра—Лапласа утверждает, что при $p = \text{const}$, $n \to \infty$ (n — параметр сходимости) распределение нормированной суммы $l_n = (S_n - \mathrm{M}[S_n]) / \sqrt{\mathrm{M}[S^2_n] - (\mathrm{M}[S_n])^2}$ сходится к гауссовскому закону. Отметим, что при этих предположениях $\mathrm{M}[S_n] = np \underset{n}{\to} \infty$ и ряд (41) расходится.

Предельная теорема Пуассона имеет дело не с последовательностями нормированных сумм, а с последовательностями самих сумм (41); при этом предполагается, что вероятность $p = p_n$ зависит от параметра сходимости n таким образом, что

$$\mathrm{M}[S_n] \underset{n}{\to} \mu. \tag{8.2.42}$$

где $\mathrm{M}[S_n] = np_n$, μ — константа, удовлетворяющая неравенству:

$$0 < \mu < \infty. \tag{8.2.43}$$

Условия (42), (43) приводят к тому, что распределение сумм (41) сходится к закону Пуассона. Таким образом, проблема сходимости распределений сумм случайных величин к предельным законам существенно зависит от того, какие рассматриваются суммы (нормированные или ненормированные) и при каких условиях.

Подобное положение имеет место и для процессов с непрерывным временем. Аналог предельной теоремы Муавра — Лапласа хорошо известен из теории стационарных случайных процессов [43, 85]. Теорема об асимптотической нормализуемости имеет место и для нормированного стохастического интеграла Ито [128]. Изучение асимптотического поведения стохастического интеграла представляет особый интерес для рассматриваемых здесь задач, так как этот интеграл является основой ЛП.

Согласно [128], если для случайного процесса $f(t) \in L_2[0, \infty]$ *) выполнены условия

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt \xrightarrow{p} b^2 \\ &\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{M}[f^2(t)]\,dt \to b^2, \end{aligned}\right\} \text{при } T \to \infty,$$

---

*) См. п. 1.4.1.

причем $b \neq 0$, то распределение нормированного стохастического интеграла Ито

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t)\, d^*\omega(t)$$

сходится к гауссовскому закону с параметрами $(0, b^2)$.

Эта теорема служит дополнительным подтверждением возможности использования формул гауссовской аппроксимации для приближенного расчета характеристик обнаружения стохастических сигналов при достаточно большом времени обнаружения T (п. 8.2.3).

Однако возможен и другой подход [111] к анализу обнаружения, основанный на изучении сходимости ненормированных процессов интегрального вида при выполнении условий, гарантирующих невырожденность задачи обнаружения. Этот подход привлекателен, в частности, тем, что в основе его лежит асимптотическое свойство именно ненормированного ЛП. Дело в том, что использование асимптотических свойств нормированных процессов вносит некоторую неопределенность в задачу анализа обнаружения, поскольку разные нормирующие множители приводят, вообще говоря, к разным предельным распределениям.

Рассмотрим задачу обнаружения произвольного стохастического сигнала $x(t)$ в белом шуме $\xi(t)$ при наблюдении

$$y(t) = \theta x(t) + \xi(t), \quad \theta = 0,1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty. \tag{8.2.44}$$

ЛП в этой задаче (см. гл. 7) равен

$$z(T) = \frac{1}{N} \int_0^T m(t)\, d^*\bar{y}(t) - \frac{1}{2N} \int_0^T m^2(t)\, dt, \tag{8.2.45}$$

где $m(t) \equiv \hat{x}_t = \mathrm{M}[x(t) \mid y_0^t, \ \theta = 1]$, а $\bar{y}(t) = \int_0^t y(S)\, dS$.

При $\theta = 0$ случайный процесс $z_0(T) = \{z(T), \ \theta = 0\}$ определяется соотношением

$$z_0(T) = \frac{1}{N} \int_0^T m_0(t)\, d^*\omega(t) - \frac{1}{2N} \int_0^T m_0^2(t)\, dt, \tag{8.2.46}$$

где $m_0(t) = \{m(t), \ \theta = 0\}$ — выходные данные блока оптимальной фильтрации при $\theta = 0$ (т. е. псевдооценка, см. п. 4.1.3), а $\omega(t) = \int_0^t \xi(S)\, dS$ — винеровский процесс.

Будем полагать, что при любом $0 < T < \infty$ одномерное распределение $P(z_0(T) < z)$ случайной величины $z_0(T)$ зависит от некоторого параметра $\lambda\,(P(z_0(T) < z) \equiv F_{0\lambda}(z, T))$ и при $\lambda \to \lambda^*$ (λ^* — предельное значение параметра λ) распределение $F_{0\lambda}(z, T)$, сходится к предельному распределению $F_0^*(z, T)$, а математическое ожидание $K_{10\lambda}(T)$ и дисперсия $K_{20\lambda}(T)$ допредельного распределения $F_{0\lambda}(z, T)$ сходятся к математиче-

скому ожиданию $K^*_{10}(T)$ и дисперсии $K^*_{20}(T)$ предельного распределения $F^*_0(z, T)$:

$$F_{0\lambda}(z, T) \underset{\lambda}{\to} F_0^*(z, T), \; K_{10\lambda}(T) \underset{\lambda}{\to} K^*_{10}(T),$$

$$K_{20\lambda}(T) \underset{\lambda}{\to} K^*_{20}(T), \quad 0 < T < \infty.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей (46) с учетом свойства интеграла Ито, запишем

$$\mathrm{M}[z_0(T)] = -0{,}5\psi_{0\lambda}(T), \tag{8.2.47}$$

где

$$\psi_{0\lambda}(T) = \frac{1}{N}\int_0^T \varphi_{0\lambda}(t)\,dt; \; \varphi_{0\lambda}(t) = \mathrm{M}[m_0^2(t)]. \tag{8.2.48}$$

Обозначив

$$W(T) = +0{,}5 \lim_{\lambda\to\lambda^*} \psi_{0\lambda}(T) \equiv -\lim_{\lambda\to\lambda^*} \mathrm{M}[z_0(T)], \tag{8.2.49}$$

будем полагать, что

$$0 < W(T) < \infty \tag{8.2.50}$$

(ср. с (42), (43)). Смысл правого неравенства (50) поясним для случая, когда сигнал $x(t)$ в (44) — гауссовский процесс, не зависящий от шума $\xi(t)$. Тогда, учитывая линейность оптимальной оценки и свойства условного математического ожидания, нетрудно получить неравенство

$$\frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}[x^2(t)]\,dt \geqslant \frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}[m_0^2(t)]\,dt.$$

Полагая в нем $\lambda \longrightarrow \lambda^*$, находим, что если $W(T) = +\infty$, то

$$\lim_{\lambda\to\lambda^*} \frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}[x^2(t)]\,dt = +\infty.$$

Данное равенство указывает на то, что при $\lambda \longrightarrow \lambda^*$ проблема обнаружения вырождается (становится сингулярной [155]). По этой причине случай $W(T) = +\infty$ не представляет интереса в практических задачах.

Поясним теперь левое неравенство (50). Для этого воспользуемся известным неравенством [59]

$$Mz_0(T) \leqslant -f(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \leqslant 0,$$

где функция $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = (1 - x)\ln\frac{1-x}{y} + x\ln\frac{x}{1-y}, \tag{8.2.51}$$

а α_λ, β_λ — вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, зависящие от λ. Учитывая (47), получаем, что если $W(T) = 0$, то

$$f(\alpha^*, \beta^*) = 0, \tag{8.2.51$'$}$$

где

$$\alpha^* = \lim_{\lambda\to\lambda^*} \alpha_\lambda; \qquad \beta^* = \lim_{\lambda\to\lambda^*} \beta_\lambda. \tag{8.2.52}$$

Равенство (51′) имеет место только при $\alpha^*+\beta^*=1$. Однако, как известно [149, с. 191], случай столь больших вероятностей ошибок не представляет интереса в статистических задачах.

Таким образом, условия (50) позволяют изучать невырождающуюся при $\lambda\longrightarrow\lambda^*$ проблему обнаружения и требовать их выполнения естественно при отыскании асимптотических характеристик.

Сформулируем теперь основные результаты [111] по сходимости распределений ЛП в задаче обнаружения произвольного стохастического сигнала в белом шуме. Для этого, используя (48), введем новый масштаб времени, положив

$$\tau=\psi_{0\lambda}(T), \qquad \nu=\psi_{0\lambda}(t);$$

$$\widetilde{m}_{\theta 0}(\tau)=\frac{m_\theta(\psi_{0\lambda}^{-1}(\tau))}{\sqrt{\widetilde{\varphi}_{0\lambda}(\tau)}}, \quad \theta=0,\ 1,$$

где $\psi_{0\lambda}^{-1}(\tau)$ — функция, обратная $\psi_{0\lambda}(\tau)$;

$$m_\theta(\psi_{0\lambda}^{-1}(\tau))=\{m(\psi_{0\lambda}^{-1}(\tau),\ \theta=j\}=\{m(T),\ \theta=j\}, \quad j=0,\ 1;$$

$$\widetilde{\varphi}_{0\lambda}(\tau)=\varphi_{0\lambda}(\psi_{0\lambda}^{-1}(\tau))=\varphi_{0\lambda}(\tau).$$

Обозначим через $F_{\theta\lambda}(z,\ T)$ $(\theta=0,\ 1)$ одномерные распределения случайных величин $z_\theta(T)=\{z(T),\ \theta=j\}$, $j=0,1$ ($z(T)$—ЛП), через $F^*_\theta(z,T)=$ $=\lim\limits_{\lambda\to\lambda^*}F_{\theta\lambda}(z,\ T)$ — соответствующие предельные распределения. Математические ожидания этих распределений обозначим $K_{1\theta\lambda}(T)$, $K^*_{1\theta}(T)$, а дисперсии $K_{2\theta\lambda}(T)$, $K^*_{2\theta}(T)$ соответственно.

Пусть выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^z dF_0{}^*(z,\ T)\,dz=1, \tag{8.2.53}$$

которое, как известно, [26, с. 256], обеспечивает контигуальность и характерно для асимптотических задач проверки гипотез. (Отметим, что в допредельном случае $\lambda\neq\lambda^*$ справедливость равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^z dF_{0\lambda}(z,\ T)=1$$

обеспечивается условиями существования оценочно-корреляционного представления ЛП (45). Тогда, если выполняется условие (50), то при $T\in(0,\ +\infty)$, $\lambda\to\lambda^*$ распределения $F_{\theta\lambda}(z,\ T)$ случайных величин $z_\theta(T)$ сходятся к гауссовским распределениям $F^*_\theta(z,\ T)$ (при $\theta=0$ и 1 соответственно) и

$$K_{1\theta\lambda}(T)\underset{\lambda}{\to}K^*_{1\theta}(T),\ K_{2\theta\lambda}(T)\underset{\lambda}{\to}K^*_{2\theta}(T),\ \theta=0,\ 1$$

в том и только в том случае, если при любом фиксированном $\tau>0$ имеет место среднеквадратическая сходимость

$$\int\limits_0^\tau \widetilde{m}^2_{\theta 0}(\nu)\,d\nu \xrightarrow[\lambda]{\text{ср.кв}} \tau, \qquad \theta=0,\ 1. \tag{8.2.54}$$

Соотношение (54) можно интерпретировать как среднеквадратическую сходимость энергии выходных данных блока оптимальной фильтрации (при специальном выборе масштаба времени) к своему среднему значению. При этом средние значения

$$K^*_{1\theta}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF^*_\theta(z, T)$$

и дисперсии

$$K^*_{2\theta}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 dF^*_\theta(z, T) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} z dF^*_\theta(z, T) \right)^2$$

гауссовских распределений $F^*_\theta(z, T)$ связаны между собой соотношениями

$$K^*_{11}(T) = -K^*_{10}(T) = 0{,}5K^*_{2q}(T) = 0{,}5K^*_{21}(T) = W(T), \qquad (8.2.55)$$

так что предельные распределения равны

$$F^*_0(z, T) = F\left(\frac{z + W(T)}{\sqrt{2W(T)}}\right),$$

$$F^*_1(z, T) = F\left(\frac{z - W(T)}{\sqrt{2W(T)}}\right), \qquad (8.2.56)$$

где $F(y)$ — интеграл вероятностей (34).

Более того, в [111] показано, что при выполнении (53) условие (54) является необходимым и достаточным для сходимости конечномерных распределений процессов $z_0(T)$ и $z_1(T)$ к конечномерным распределениям винеровских процессов, выражения для переходных плотностей которых

$$p_\theta(z, T \mid \zeta, t) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\lim_{\lambda \to \lambda^*} P\{z_\theta(T) < z \mid z_\theta(t) = \zeta\}\right], \quad \theta = 0, 1,$$

имеют вид

$$p_0(z, T \mid \zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi (W(T) - W(t))}} \exp\left\{-\frac{[z + (W(T) - W(t)) - \zeta]^2}{4(W(T) - W(t))}\right\},$$

$$p_1(z, T \mid \zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi (W(T) - W(T))}} \exp\left\{-\frac{[z - (W(T) - W(t)) - \zeta]^2}{4(W(T) - W(t))}\right\}.$$

Найдено также, что предельное равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda^*} \frac{Mm_1^2(t)}{Mm_0^2(t)} = 1, \qquad (8.2,57)$$

выполняющееся для почти всех $t \in [0, \psi^{-1}_{0\lambda}(\tau)]$, является необходимым (но не достаточным) условием сходимости $F_{\theta\lambda}(z, T)$ к гауссовским распределениям $F^*_\theta(z, T)$, $\theta = 0, 1$.

Далее, используя общие свойства корреляционных функций, можно получить, что (54) имеет место, если максимальный коэффициент интенсивности $K_{\theta\lambda} = \max_{t \in [0, +\infty)} K_{\theta\lambda}(t)$ стремится к нулю при $\lambda \to \lambda^*$ почти всюду

$$K_{\theta\lambda} \underset{\lambda}{\longrightarrow} 0, \quad \theta = 0, 1, \qquad (8.2.58)$$

здесь

$$K_{\theta\lambda}(t)=\frac{2}{N}\int_0^t \frac{\mathrm{M}[m_\theta^2(t)\,m_\theta^2(t-s)]-\mathrm{M}[m_\theta^2(t)]\,\mathrm{M}[m_\theta^2(t-s)]}{\mathrm{M}[m_\theta^2(t)]\,\mathrm{M}[m_\theta^2(t-s)]}\,\mathrm{M}[m_\theta^2(s)]\,ds \qquad (8.2.59)$$

— текущий коэффициент интенсивности. Сходимость (58) является достаточным условием сходимости (54). Если же почти всюду на $[0,\ \psi_{0\lambda}^{-1}(\tau)]$

$$K_{\theta\lambda}(t)\geqslant 0, \quad \theta=0,\ 1, \qquad (8.2.60)$$

и сходимость $K_{\theta\lambda}\underset{\lambda}{\longrightarrow}0,\ t\in[0,\ \psi_{0\lambda}^{-1}(\tau)]$ (по мере Лебега) эквивалентна сходимости (58), то (58) является не только достаточным, но и необходимым условием сходимости (54). Таким образом, согласно (59) для расчета коэффициента интенсивности (а значит, и при изучении вопроса о сходимости ЛП к винеровскому процессу) требуется лишь знание средних значений и корреляционных функций процессов $m_\theta^2(t),\ \theta=0{,}1$.

При решении практических задач представляет также интерес вид распределений процессов $z_0(t)$, $z_1(t)$ при $\lambda\neq\lambda^*$. Ясно, что если рассматриваемые значения λ таковы, что

$$K_{\theta\lambda}\ll 1, \quad \theta=0,\ 1, \qquad (8.2.61)$$

то точные предельные соотношения (55), (56) заменяются на приближенные допредельные равенства:

$$K_{11\lambda}(T)\approx -K_{10\lambda}(T)\approx 0{,}5K_{20\lambda}(T)\approx 0{,}5K_{21\lambda}(T)\approx\frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}m_0^2(t)\,dt\approx$$

$$\approx\frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}m_1^2(t)\,dt,$$

$$F_{0\lambda}(z,\ T)\approx F\left(\frac{z-K_{10\lambda}(T)}{\sqrt{K_{20\lambda}(T)}}\right),$$

$$F_{1\lambda}(z,\ T)\approx F\left(\frac{z-K_{11\lambda}(T)}{\sqrt{K_{21\lambda}(T)}}\right). \qquad (8.2.62)$$

8.2.5. Асимптотические характеристики оптимального обнаружения [112]. Предполагая, как и в предыдущем параграфе, что распределения $F_{\theta\lambda}(z,\ T)=P\{z_\theta(T)<z\}$, $(\theta=0,\ 1)$ зависят от параметра сходимости, запишем выражения для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода $\alpha_\lambda,\ \beta_\lambda$:

$$\alpha_\lambda=1-F_{0\lambda}(h,\ T);\quad \beta_\lambda=F_{1\lambda}(h,\ T), \qquad (8.2.63)$$

где h — порог обнаружения.

Пусть при $\lambda\to\lambda^*$ выполняются условия сходимости (п. 8.2.4) распределений $F_{\theta\lambda}(z,\ T)$ к гауссовским $F^*_\theta(y,\ T)$. Тогда, переходя в (63), к пределу, используя при этом (56) и обозначения (52), получим

$$\alpha^*=1-F\left(\frac{h+W(T)}{\sqrt{2W(T)}}\right),\quad \beta^*=F\left(\frac{h-W(T)}{\sqrt{2W(T)}}\right). \qquad (8.2.64)$$

Комбинируя эти равенства, найдем уравнение асимптотических характеристик оптимального обнаружения произвольных стохастических сигналов в белом шуме:

$$F^{-1}(\beta^*)+F^{-1}(\alpha^*)=-\sqrt{2W(T)}. \qquad (8.2.65)$$

Отметим, что это же уравнение вытекает из (38), если учесть, что коэффициенты переноса M_0, M_1 и коэффициенты диффузии K_0, K_1 предельных марковских (винеровских) процессов $z_0(T)$, $z_1(T)$ в соответствии с (55) удовлетворяют равенствам

$$M_1=-M_0=0{,}5K_0=0{,}5K_1=W(T)/T. \qquad (8.2.66)$$

Чтобы полнее выявить смысл входящей в уравнение (65) величины $W(T)$, сделаем несколько замечаний относительно трактовки задачи двухальтернативного обнаружения с позиций теории информации.

В процессе приема на вход обнаружителя в течение времени $[0, T]$ поступает наблюдаемый процесс $\{y_t\}$, содержащий в себе некоторую информацию $I(y_0{}^T)$ о значении параметра $\theta=0{,}1$. Согласно [59] определим $I(y_0{}^T)$ равенством

$$I(y_0^T)=\begin{cases} z(T) & \text{при } \theta=1, \\ -z(T) & \text{при } \theta=0, \end{cases} \qquad (8.2.67)$$

где $z(T)=\ln[p(y_0^T\,|\,\theta=1)/p(y_0^T\,|\,\theta=0)]$ — информация, содержащаяся в наблюдаемом процессе в пользу $\theta=1$ против $\theta=0$; $-z(T)=\ln[p(y_0^T\,|\theta=0)/p(y_0^T\,|\,\theta=1)]$ — информация в пользу $\theta=0$ против $\theta=1$.

Средняя информация $I_\lambda(T)=\mathrm{M}[I(y_0^T)]$ равна

$$I_\lambda(T)=p_1I_{1\lambda}(T)+p_0I_{0\lambda}(T),$$

где p_1 и $p_0=1-p_1$ — априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала;

$$I_{1\lambda}(T)=\mathrm{M}\,[I(y_0^T)|\,\theta=1]=\mathrm{M}\,[z(T)\,|\,\theta=1],$$

$$I_{0\lambda}(T)=\mathrm{M}\,[I(y_0^T)|\,\theta=0]=-\,\mathrm{M}\,[z(T)\,|\,\theta=0]$$

— условные информационные меры.

Нетрудно видеть, что

$$I_{1\lambda}(T)=\frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}\,[m^2(t)\,|\,\theta=1]\,dt,$$

$$(8.2.68)$$

$$I_{0\lambda}(T)=\frac{1}{2N}\int_0^T \mathrm{M}\,[m^2(t)\,|\,\theta=0]\,dt,$$

и при $\lambda\longrightarrow\lambda^*$ справедливы предельные равенства (см. (55)):

$$I_1^*(T)=I_0^*(T)=I^*(T)=W(T), \qquad (8.2.69)$$

где

$$I^*_\theta(T)=\lim_{\lambda\to\lambda^*} I_{\theta\lambda}(T), \quad \theta=0,\ 1;$$

$$I^*(T)=\lim_{\lambda\to\lambda^*} I_\lambda(T).$$

С учетом (69) уравнение (65) можно записать в виде

$$F^{-1}(\beta^*)+F^{-1}(\alpha^*)=-\sqrt{2I^*(T)},$$

или в эквивалентной форме:

$$F^{-1}(\beta_\lambda)+F^{-1}(\alpha_\lambda)\sim-\sqrt{2I_\lambda(T)}. \qquad (8.2.70)$$

Здесь соотношение $\Phi_{1\lambda}\sim\Phi_{2\lambda}$ означает, что $\lim\limits_{\lambda\to\lambda^*}\Phi_{1\lambda}=\lim\Phi_{2\lambda}$ при условии $0<I^*(T)\equiv W(T)<\infty$ (см. (50)).

В целях выявления взаимосвязи между ошибками обнаружения и ошибками оценивания представим $I_{1\lambda}(T)$ (68) в ином виде. Для этого, используя свойства условного математического ожидания, запишем:

$$\mathrm{M}[m^2(t)\,|\,\theta=1]=\mathrm{M}\{\mathrm{M}[x^2(t)\,|\,y_0^t,\ \theta=1]\,|\,\theta=1\}-$$
$$-\mathrm{M}\{\mathrm{M}[(x(t)-\mathrm{M}[x(t)\,|\,y_0^t,\ \theta=1])^2\,|\,y_0^t,\ \theta=1]\,|\,\theta=1\}=$$
$$=\sigma^2(t)-D_t=\sigma^2(t)\,r(t), \qquad (8.2.71)$$

где $\sigma^2(t)=\mathrm{M}[x^2(t)]$ — мощность полезного сигнала, $D_t=\mathrm{M}[(x(t)-m(t))^2|\theta=1]$ — средний квадрат ошибки фильтрации (см. п. 8.1.1),

$$r(t)=\frac{\sigma^2{}_0(t)-D_t}{\sigma^2(t)} \qquad (8.2.72)$$

— относительная точность фильтрации, $0\leqslant r(t)\leqslant 1$.

Подстановка (71) в (68) дает

$$I_{1\lambda}(T)=\frac{1}{2N}\int_0^T\sigma^2(t)\,r(t)\,dt,$$

откуда, используя (69), (70), получаем

$$F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)\sim-\sqrt{\frac{1}{N}\int_0^T\sigma^2(t)\,r(t)\,dt} \qquad (8.2.73)$$

(здесь и впоследствии в асимптотических равенствах типа (70) зависимость от λ не выписывается).

Полученные формулы (65), (70), (73) связывают вероятности ошибок обнаружения с количеством средней информации о параметре θ, содержащейся в наблюдаемом процессе, а также с относительной точностью оценивания полезного сигнала.

Отметим, что в допредельном случае, когда для рассматриваемых значений параметра λ выполняется неравенство (61), можно использовать все приведенные выше асимптотические соотношения, которые, однако, уже следует рассматривать как приближенные (знак $\sim$ заме-

няется на знак приближенного равенства $\approx$). Так, уравнение (73) примет вид

$$F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)\approx-\sqrt{\frac{1}{N}\int\limits_0^T\sigma^2(t)\,r(t)\,dt}. \tag{8.2.74}$$

Заметим, что приведенные в п. 8.2.4 условия сходимости ненормированного ЛП к винеровскому процессу (по распределению) и асимптотические характеристики обнаружения (п. 8.2.5) допускают прямое обобщение на задачу обнаружения произвольных сигналов на фоне произвольных помех при наличии белого шума. Это следует из того, что указанная задача может быть сведена, например, методом порождающего процесса к задаче обнаружения некоторого преобразованного сигнала в белом шуме (см. п. 7.1.3).

8.3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖЕНИЯ

Проиллюстрируем применение полученных выше формул на конкретных примерах анализа в задачах обнаружения.

8.3.1. Детерминированный сигнал на фоне белого шума. В том простейшем случае, когда полезный сигнал в (8.2.44) является детерминированным ($x(t)=S(t)$), имеют место очевидные соотношения:

$$m_0(t)\equiv m(t)\equiv S(t);\qquad K_{0\lambda}\equiv 0,\ r(t)=1.$$

При этом асимптотические равенства п. 8.2.5 переходят в точные. Так, вместо (69) имеем

$$I_1(T)=I_0(T)=\check{I}(T)=W(T)=\frac{1}{2N}\int\limits_0^T S^2(t)\,dt,$$

а уравнение (70), (73) приобретает вид

$$F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)=-\sqrt{\frac{1}{N}\int\limits_0^T S^2(t)\,dt}. \tag{8.3.1}$$

Характеристики обнаружения в данном случае полностью определяются отношением энергии $E=\int\limits_0^T S^2(t)\,dt$ полезного сигнала к спектральной плотности N белого шума.

8.3.2. Марковский гауссовский сигнал на фоне белого шума. Оптимальный обнаружитель для рассматриваемого здесь случая синтезирован в п. 4.3.2. Осуществляя анализ данного обнаружителя, найдем коэффициенты M_0, M_1, K_0, K_1 (8.2.31′).

Вычислим вначале M_0. Для этого, используя уравнение для ЛП в форме Ито и свойство стохастического интеграла (1.4.4), получаем

$$\mathbf{M}\,[z_T\,|\,\theta=0]=-\frac{1}{2N}\int\limits_0^T\mathbf{M}\,[m_t^2\,|\,\theta=0]\,dt,$$

отсюда и из (8.2.31′) следует, что

$$M_0 = -\frac{1}{2N} \lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\,[m_t^2 \,|\, \theta = 0]. \tag{8.3.2}$$

Псевдооценка $m_{0t}=\{m_t,\ \theta=0\}$ определяется согласно (4.3.13) стохастическим уравнением

$$dm_{0t} = -\left(\gamma + \frac{1}{Nh_t}\right) m_{0t}\, dt + \frac{1}{\sqrt{N}\, h_t}\, d\omega_t,$$

где ω_t — стандартный винеровский процесс. При этом для m_{0t}^2 согласно формуле дифференцирования Ито имеем

$$d^* m_{0t}^2 = \left[\frac{1}{Nh_t^2} - 2\left(\gamma + \frac{1}{Nh_t}\right) m_{0t}^2\right] dt + 2m_{0t}\frac{1}{\sqrt{N}\, h_t}\, d\omega_t.$$

Записав уравнение в интегральной форме (положив $m_{00}=0$) и взяв затем от обеих его частей математическое ожидание, получим

$$\mathrm{M}m_{0t}^2 = \int_0^t \left[\frac{1}{Nh_\tau^2} - 2\left(\gamma + \frac{1}{Nh_\tau}\right)\mathrm{M}m_{0\tau}^2\right] d\tau.$$

Дифференцирование по t дает

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}m_{0t}^2 = \frac{1}{Nh_t^2} - 2\left(\gamma + \frac{1}{Nh_t}\right)\mathrm{M}m_{0t}^2 .$$

При $t\to\infty$ имеем $\frac{d}{dt}\mathrm{M}m_{0t}^2 \to 0$. Поэтому

$$\frac{1}{Nh_\infty^2} - 2\left(\gamma + \frac{1}{Nh_\infty}\right)\mathrm{M}m_{0\infty}^2 = 0.$$

Отсюда и из (2) получаем

$$M_0 = -\frac{1}{4Nh\,(\gamma Nh + 1)} = -\frac{\sigma^2}{2N}\, r\,\frac{1-r}{1+r}. \tag{8.3.3}$$

где константа $h=h_\infty$ ($1/h$ — средний квадрат ошибки фильтрации) определяется формулой (4.3.22), а

$$r = \lim_{\tau\to\infty} r(t) = 1 - (\sigma^2 h)^{-1} = 1 - \frac{2}{1+\sqrt{1+2\sigma^2/N\gamma}} = \frac{2q}{(1+\sqrt{1+2q})^2} \tag{8.3.4}$$

— относительная точность фильтрации (8.2.72) в стационарном режиме, $q=\sigma^2/N\gamma$ — отношение сигнал/шум.

Аналогичным образом, используя (8.2.31′), стохастические уравнения для ЛП и для оценки m_t можно вычислить и остальные коэффициенты, т. е. M_1, K_0, K_1.

Отметим, что расчет коэффициентов M_1, K_1 существенно упрощается, если в стохастических уравнениях для $\{z_t,\ m_t\}$ использовать возможность минимального представления (см. п. 1.4.4) процесса $y_t = x_t + \xi_t$ в виде $y_t = m_t + \tilde{\xi}_t$, где $\tilde{\xi}_t$ — белый шум интенсивности N. Приведем окончательные результаты [109]:

$$K_0 = (\sigma^2/N)\, r\,[(1-r)/(1+r) - 2(1-r)\,r/(1+r)^2 + (1-r)\,r^2/(1+r)^3];$$
$$M_1 = (\sigma^2/2N)\, r,\quad K_1 = (\sigma^2/N)\, r\,[1 + 2r/(1-r) + r^2/(1-r)^2]. \tag{8.3.5}$$

Подставив (3)—(5) в (8.2.37) или в (8.2.38), нетрудно рассчитать и построить графики характеристик обнаружения для различных значений отношения сигнал/шум q. Эти характеристики будут зависеть также и от безразмерного параметра γT, представляющего собой произведение полосы спектра сигнала на его длительность (γ^{-1} — время корреляции сигнала). Построенные таким способом характеристики приближенно определяют качество обнаружения при достаточно большом времени наблюдения T — при выполнении условий (8.2.28), которые в данном примере можно заменить на условие $\gamma T \gg 1$.

Конкретизируем теперь условия применимости асимптотических характеристик обнаружения п. 8.2.5, дающих в пределе точный результат. Для этого нужно выяснить, что собой представляет параметр сходимости λ.

Воспользовавшись выражениями для M_0 и M_1 (3), (5), получаем

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{M}\,[m_1^2(t) \mid \theta = 1]}{\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{M}\,[m_0^2(t) \mid \theta = 0]} = -\frac{M_1}{M_0} = 1 + \frac{2r}{1-r}.$$

Отсюда видно, что необходимое условие сходимости (8.2.57) выполняется только при $r \longrightarrow 0$. Кроме того, нетрудно показать [112], вычислив коэффициент интенсивности (8.2.59), что при $\lambda = r \longrightarrow 0$ имеет место (8.2.58).

Таким образом, в рассматриваемой задаче параметром сходимости λ является относительная точность фильтрации r или, что эквивалентно, отношение сигнал/шум q (см. (4)), а предельное значение λ^* параметра λ равно нулю: $\lambda = r$, $\lambda^* = r^* = 0$, либо $\lambda = q$, $\lambda^* = q^* = 0$. Следовательно, при фиксированном количестве средней информации $W(T)$ на входе обнаружителя и $r \longrightarrow 0$ становятся справедливыми предельные характеристики обнаружения (8.2.65), (8.2.70), (8.2.73). В допредельном случае $0 < r \ll 1$ (при этом выполняется (8.2.61)) вместо асимптотических формул нужно воспользоваться приближенным соотношением (8.2.74). В указанных формулах $\sigma^2(t) = \sigma^2$, $r(t) = 1 - [\sigma^2 h(t)]^{-1}$, а $h(t)$ определяется (4.3.21).

Замечание. Выше приведен расчет характеристик обнаружения для случая марковского гауссовского сигнала, независимого от шума. Для иллюстрации влияния взаимосвязи сигнала и шума на качество обнаружения рассмотрим случай сильной взаимосвязи, т. е. когда $\delta = 1$ и $\overline{dx_t d\omega_t} = \sqrt{Nb}\, dt$. Задача фильтрации при этом оказывается вырожденной (см. п. 8.1.3,б), однако задача обнаружения остается регулярной (несингулярной), поскольку выполняются соответствующие условия обеспечения абсолютной непрерывности мер.

Используя изложенную выше процедуру вычисления коэффициентов M_θ, K_θ, получаем

$$M_0 = -\gamma q \frac{1}{2(1+\sqrt{2q})}, \qquad M_1 = 0{,}5\gamma q,$$

$$K_0 = \gamma q\,[1/(1+\sqrt{2q}) + q/2\,(1+\sqrt{2q})^3 - \sqrt{2q}/(1+\sqrt{2q})^2],$$

$$K_1 = \gamma q\,[1 + 0{,}5q + \sqrt{2q}].$$

При малом отношении сигнал/шум ($q \ll 1$)

$$M_1 \approx -M_0 \approx 0{,}5K_1 \approx 0{,}5K_0 = 0{,}5\gamma q,$$

тогда имеем

$$F^{-1}(\alpha) + F^{-1}(\beta) = -\sqrt{\sigma^2 T/N}.$$

Полученные асимптотические характеристики определяются только отношением энергии сигнала к спектральной плотности шума. Заметим, что последнее соотношение следует также из общего уравнения (8.2.74), так как при зависимых сигнале и шуме для стационарного режима

$$\lim_{t\to\infty} \sigma^2(t) = \sigma^2, \quad \lim_{t\to\infty} r(t) = 1.$$

В рассматриваемой здесь задаче характеристики обнаружения не зависят от точности фильтрации. Это вполне естественно, поскольку задача оценивания при $\delta = 1$ вырождена.

8.3.3. Детерминированный сигнал на фоне гауссовской коррелированной помехи и белого шума. Приближенные характеристики обнаружения детерминированного постоянного смещения $S(t) \equiv S$ в марковской гауссовской помехе при наличии белого шума, рассчитанные согласно формулам (8.2.31), (8.2.38), определяются соотношением [92]:

$$F^{-1}(\beta) + F^{-1}(\alpha) = -\sqrt{\frac{S^2 T}{N(1 + 2\sigma_0^2/N\mu)}}, \qquad (8.3.6)$$

где σ_0^2 — дисперсия; μ^{-1} — время корреляции помехи.

Отсюда, в частности, видно, что при увеличении отношения помеха/шум $\sigma_0^2/N\mu$ качество работы обнаружителя ухудшается. Если же положить $\sigma_0^2=0$ (помеха отсутствует), то уравнение (6) дает характеристики обнаружения детерминированного сигнала S в белом шуме (см. (1)).

Отметим, что в рассматриваемом здесь примере можно получить и точные характеристики, если учесть, что задача обнаружения детерминированного сигнала $S(t)$ на фоне марковской гауссовской помехи $\eta(t)$ и белого шума сводится (см. п. 5.3.1б) к задаче обнаружения преобразованного детерминированного сигнала $\tilde{S}(t)$ в белом шуме. Поэтому согласно (1) точные характеристики обнаружения определяются формулой:

$$F^{-1}(\beta) + F^{-1}(\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{N}\int_0^T [\tilde{S}(t)]^2\, dt}, \qquad (8.3.7)$$

где $\tilde{S}(t)$ находится из (5.3.15). Если дисперсию помехи σ_0^2 положить равной нулю, то $h(t)=\infty$ и согласно (5.3.15) $\tilde{S}(t)=S(t)$, при этом уравнение (7) перейдет в (1).

Поскольку задача обнаружения детерминированного $S(t)$ сигнала на фоне помехи η_t и белого шума (аддитивных) сводится к указанной более простой задаче не только в случае марковской гауссовской, но и при немарковской гауссовской помехе (см. гл. 7), то уравнение (7) оказывается справедливым и в этом случае. При произвольной гауссовской помехе η_t под $\tilde{S}(t)$ в (7) следует понимать

$$\tilde{S}(t) = S(t) - m_0[S(t)], \qquad (8.3.8)$$

где детерминированную функцию $m_0[S(t)]$ получаем, подставив $S(t)$ вместо $y(t)$ в оценку $m_0[y(t)] = \mathbf{M}[\eta_t | y_0^t, \theta=0]$. Для марковской гауссовской помехи конкретизация формулы (8) дает (5.3.15).

8.3.4. Детерминированный сигнал на фоне фазомодулированной помехи и белого шума [105]. Пусть на входе обнаружителя имеется процесс

$$y_t = \theta A \sin \omega t + B \sin(\omega t + \psi_t) + \xi_t; \quad \theta = 0, 1, \tag{8.3.9}$$

где A, B, ω — известные постоянные величины; ψ_t — случайная фаза, определяемая стохастическим уравнением

$$\dot{\psi}_t = -\gamma\psi_t + \zeta_t, \quad M\zeta_t = 0, \quad M\zeta_t\zeta_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau).$$

Рассматривая случай слабого сигнала, воспользуемся квазиоптимальным алгоритмом обнаружения (7.2.19), схемная реализация которого содержит обеляющий фильтр. Кроме предположения о малом отношении сигнал/шум, введем практически оправданное предположение о большом отношении помеха/шум. Это обеспечивает выполнение условия высокой апостериорной точности фильтрации помехи, так что для синтеза обеляющего фильтра можно использовать метод гауссовского приближения (п. 6.1.2). Применение этого метода при синтезе фильтра фазомодулированной помехи приводит к схеме типа ФАП, которая является квазиоптимальной (см. п. 6.2.1). При этом, естественно, и обеляющий фильтр будет квазиоптимальным, и полного обеления помехи не произойдет.

Итак, вычислим характеристики обнаружителя, построенного по схеме обеляющий фильтр — корреляционный приемник согласно формуле

$$z_T = \frac{1}{N}\int_0^T A \sin \omega t\,[y_t - B\sin(\omega t + m_t)], \tag{8.3.10}$$

где оценка m_t фазы ψ_t определяется уравнениями (6.2.2), (6.2.3) (в указанных уравнениях нужно заменить A_0 на B). Расчеты проведем по методике п. 8.2.3 с учетом следующих упрощений: 1) в условиях высокой апостериорной точности (мощная помеха) возможна линеаризация уравнений (6.2.2), (6.2.3); 2) слабый сигнал мало влияет на точность фильтрации помехи.

При этих предположениях получаем следующее уравнение характеристик обнаружения:

$$F^{-1}(\beta) + F^{-1}(\alpha) = -\sqrt{\frac{A^2T}{2N(1+D)}}, \tag{8.3.11}$$

где

$$D = \frac{B^2}{4N\gamma}\Big\{\sigma_\psi^4 \exp(-\sigma_\psi^2) + \sigma_m^4 \exp(-\sigma_m^2) -$$

$$- \sigma_m^4 \exp\left(-\frac{\sigma_\psi^2 + \sigma_m^2}{2}\right) - \sigma_\psi^4 \exp\left(-\frac{\sigma_\psi^2 + \sigma_m^2}{2}\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{8}{(2 + B^2/2N\gamma h)^2} + \frac{4}{(2 + B^2/2N\gamma h)^2\,(1 + B^2/2N\gamma h)}\right]\Big\},$$

$$\sigma_\psi^2 = \frac{\varkappa}{2\gamma}; \quad \sigma_m^2 = \sigma_\psi^2\,\frac{B^2}{2N\gamma h}\,\frac{1}{(2 + B^2/2N\gamma h)};$$

$$h = \frac{1}{2\sigma_\psi^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{B^2}{N\gamma}\,\sigma_\psi^2}\right].$$

Отметим, что уравнение (11) определяет качество работы квазиоптимального обнаружителя (10). В предыдущих же примерах п. 8.3.1—8.3.3 рассчитывались характеристики оптимального обнаружения.

Для сравнения рассмотрим помехоустойчивость обычного корреляционного обнаружителя, в котором нет обеляющего фильтра. Такой приемник при воздействии на

него процесса (9) является неоптимальным. Его характеристики обнаружения (в условиях (9)) определяются уравнением *)

$$F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)=-\sqrt{A^2T/2N\,(1+D_{\text{н}})}, \qquad (8.3.12)$$

где $D_{\text{н}}=(B^2/4N\gamma)\,\sigma_\phi^4\exp(-\sigma_\phi^2)$.

На рис. 8.1 представлены характеристики обнаружения, рассчитанные по формулам (11) (график *1*) и (12) (график *2*) для частного случая: $\sigma^2_\phi=0{,}5$; $A^2T/2N=49$; $B^2/N\gamma=100$. Из графиков видно, что квазиоптимальный обнаружитель (10) значительно превосходит в помехоустойчивости корреляционный приемник, который является не защищенным при воздействии фазомодулированной помехи. Так, в данном числовом примере для достижения одинакового качества работы обоих обнаружителей необходимо при корреляционном приеме увеличить энергию полезного сигнала примерно на 5 дБ.

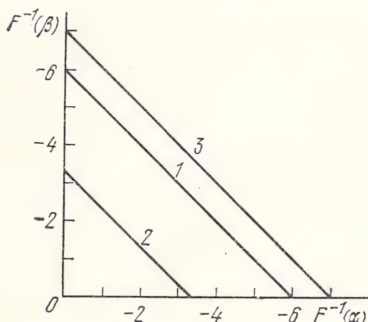


Рис. 8.1

На рис. 8.1 для тех же числовых значений построены характеристики оптимального обнаружения детерминированного сигнала $S(t)\equiv\equiv A\sin\omega t$ на фоне только белого шума (график *3*) по формуле

$$F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)=-\sqrt{A^2T/2N}, \qquad (8.3.13)$$

вытекающей из (1). Сравнение графиков *3* и *2* показывает, что при обычном корреляционном приеме наличие фазомодулированной помехи приводит к ухудшению качества обнаружения в отношении сигнал/шум примерно на 7 дБ (в данном примере). Введение же обеляющего фильтра позволяет существенно повысить помехозащищенность (график *1*).

Отметим, что помехоустойчивость обнаружения в сильной степени зависит от величины σ^2_ϕ — дисперсии флюктуаций фазы. При $\sigma^2_\phi=0$ характеристики обнаружения (11), (12) совпадают с характеристиками (13). Это и понятно, так как в данном случае помеха представляет собой детерминированное колебание, которое можно устранить из наблюдаемого процесса со сколь угодно высокой точностью. Детерминированный процесс, по существу, помехой не является.

Кроме того, отметим, что при $\sigma_\phi^2=\text{const}$ качество обнаружения квазиоптимального приемника с увеличением мощности помехи падает (так как величина $(1+D)$ возрастает), хотя точность фильтрации помехи увеличивается. (Аналогичное положение имеет место и в примере п. 8.3.3.) Это свидетельствует о том, что мощность нескомпенсированных остатков помехи с увеличением отношения помеха/шум $B^2/N\gamma$ растет.

8.4. МАШИННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В ряде задач обработки сигналов не удается найти расчетные формулы, позволяющие проанализировать систему. Проведение же физического (натурного) эксперимента, как правило, достаточно сложно и связано с большими материальными и временными затратами. В этих условиях становится незаменимым машинный эксперимент (особенно на начальном этапе проектирования систем). Кроме того, он полезен также и в тех случаях, когда расчетные формулы все же удается

*) При расчете соотношений (11) и (12) использовалось, как и в [88], разложение корреляционных функций по полиномам Эрмита. Ввиду быстрой сходимости ряда учитывались только первые два члена разложения.

отыскать с использованием тех или иных аппроксимаций. Машинный эксперимент здесь нужен для проверки правильности сделанных предположений. Сущность такого эксперимента, основанного на методе статистических испытаний — методе Монте-Карло [40] — состоит в том, что на электронной вычислительной машине многократно вырабатывается вероятностная модель наблюдаемого процесса *), которая затем преобразуется в соответствии с изучаемым алгоритмом, причем результаты преобразования статистически обрабатываются с целью определения показателей качества работы системы.

Рассмотрим методику машинного эксперимента на ЭВМ в задачах обнаружения и проведем анализ для конкретных примеров.

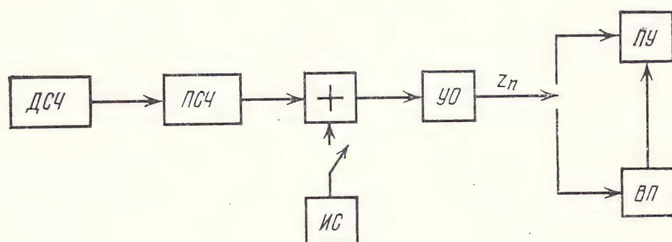


Рис. 8.2

8.4.1. Негауссовская помеха. Функциональная схема проведения машинного эксперимента показана на рис. 8.2: ДСЧ — датчик случайных чисел, ПСЧ — преобразователь случайных чисел ДСЧ в случайные числа с требуемым законом распределения вероятностей, ИС — имитатор сигнала, УО — устройство обработки (исследуемый алгоритм обнаружения), ПУ — пороговое устройство, ВП — вычислитель порога.

Эта функциональная схема машинного эксперимента является довольно общей для задач обнаружения сигналов на фоне помех. Далее она будет проиллюстрирована на простом примере обнаружения детерминированных сигналов в негауссовской помехе с независимыми значениями, распределение вероятностей которой описывается законом Лапласа (6.3.29).

Для работы ДСЧ нужна та или иная стандартная программа случайных чисел. Пусть, например, имеется программа случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0,2]. Чтобы получить случайные числа с требуемым законом распределения

$$F_\eta(x) = P(\eta \leqslant x),$$

воспользуемся известным методом обратной функции. Согласно этому методу, если ξ — равномерно распределенная на отрезке [0,1] случайная величина, то искомая случайная величина η с заданным законом распределения $F_\eta(x)$ получается с помощью преобразования

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi), \tag{8.4.1}$$

где F_η^{-1} — функция, обратная F_η.

---

*) Способы машинной имитации случайных процессов описаны в [12, 80].

Функция распределения Лапласа имеет вид

$$F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(y)\,dy=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp(ax), & -\infty<x\leqslant 0;\\ 1-\frac{1}{2}\exp(-ax), & 0<x<\infty\end{cases}$$

(плотность $\rho(y)$ определяется (6.3.29)).

Отсюда и из (1) получаем, что

$$\eta=\begin{cases}\frac{1}{a}\ln 2\xi, & 0<\xi\leqslant\frac{1}{2};\\ -\frac{1}{a}\ln(2-2\xi), & \frac{1}{2}<\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

Учитывая, что ДСЧ дает равномерные числа на отрезке [0,2], имеем следующий алгоритм для имитации лапласовской помехи:

$$\eta=\begin{cases}\frac{1}{a}\ln\xi_1, & 0<\xi_1\leqslant 1;\\ -\frac{1}{a}\ln(2-\xi_1), & 1<\xi_1\leqslant 2.\end{cases}$$

Согласно этому алгоритму и работает ПСЧ. Имитатор сигнала ИС формирует последовательность детерминированных чисел. Обработка наблюдений, состоящих из сигнала плюс помеха или одной помехи, производится в блоке УО, который моделируется на ЭВМ в соответствии с исследуемым алгоритмом.

В рассматриваемом примере анализировался асимптотически оптимальный обнаружитель слабых детерминированных сигналов на фоне лапласовской помехи с независимыми значениями. Поэтому, согласно п. 6.3.2, блок УО представлял собой коррелятор, на входе которого стоит идеальный ограничитель (6.3.30). Кроме того, для сравнения анализировался корреляционный обнаружитель; в этом случае блок УО — коррелятор (умножитель и сумматор).

Анализ обнаружителя целесообразно проводить при фиксированной вероятности ложной тревоги α. Для этого нужно определить пороговый уровень h, при котором обеспечивается заданная вероятность α. Вероятность ложной тревоги можно оценить отношением числа превышений значений z_n (рис. 8.2) порога обнаружения (при $\theta=0$) к общему числу испытаний K:

$$\alpha=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}d_0(i),$$

где величина $d_0(i)$, равная нулю или единице, есть индикатор превышения порога при отсутствии сигнала ($\theta=0$). Проводя вычисления для различных значений порога h, можно получить зависимость $\alpha(h)$ и по ней определить необходимое значение порога. Отметим, что для вычисления порога, фиксирующего вероятность ложной тревоги $\alpha=10^{-r}$ ($r=1, 2\ldots$), требуется не менее $K=10^{r+1}$ испытаний.

При определении порога выход блока УО подключается к ВП. Найденный порог устанавливается в пороговом устройстве ПУ.

После этого вычисляется вероятность правильного обнаружения D, для чего имитатор сигнала ИС подключается к сумматору и наблюдаемый процесс — сигнал плюс помеха — подвергается тем же преобразованиям (в блоке УО), что и при вычислении α. Затем результат обработки z_n поступает в ПУ, где z_n сравнивается с порогом. За вероятность правильного обнаружения берется величина

$$D=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} d_1(i),$$

где $d_1(i)=0,1$ — индикатор превышения порога при наличии сигнала ($\theta=1$).

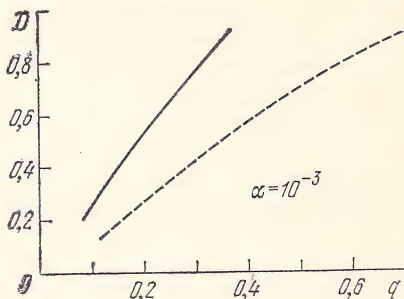


Рис. 8.3

Изменяя величину сигнала, можно найти значения вероятности правильного обнаружения D для различных значений отношения сигнал/помеха q и по ним построить характеристику обнаружения — зависимость $D(q)$ при фиксированной вероятности ложной тревоги α.

Результаты машинного эксперимента представлены на рис. 8.3. Сплошная линия — характеристика асимптотически оптимального обнаружителя, пунктирная — характеристика корреляционного обнаружителя, $q=S^2/\sigma_0^2$ — отношение сигнал/помеха в одном отсчете (в обоих случаях сигнал — детерминированный, помеха — лапласовская с независимыми значениями с параметром $a=1$, объем выборки $n=50$).

Корреляционный обнаружитель, являясь оптимальным при обнаружении детерминированного сигнала в гауссовской помехе с независимыми значениями, будет, однако, неоптимальным при воздействии лапласовской помехи. Поэтому он, естественно, проигрывает асимптотически оптимальному обнаружителю в отношении сигнал/помеха; в рассматриваемом примере проигрыш составляет около 3 дБ.

8.4.2. Многоканальное обнаружение. Остановимся теперь на результатах машинного эксперимента [18] для некоторых задач многоканального обнаружения сигналов (§ 6.4). В качестве полезного сигнала взят квазигармонический сигнал $S(x_k, t_k)=A\cos(\omega t_k+x_k)$ с флюктуирующей фазой x_k, представляющей собой гауссовский экспоненциально-коррелированный процесс; параметры A и ω — известны; шум — гауссовский с независимыми значениями.

Цель анализа: сравнение упрощенной обработки (см. п. 6.4.4) с исходной; выявление влияния числа каналов на характеристики обнаружения; выявление влияния связей между каналами на характеристики обнаружения.

В исследуемых алгоритмах первой операцией является умножение наблюдаемых данных y_k на опорное колебание $S_k(x'_j)=A\cos(\omega t_k+x'_j)$ (см. (6.4.25), (6.4.26)). Для упрощения процедуры машинного анализа целесообразно вырабатывать модель не исходных наблюдаемых данных, а сигнала, возникающего после перемножения значений y_k на опорное колебание. При этом наблюдаемый процесс можно записать в виде

$$y_k=\begin{cases} q\cos(x_j'-x_k)+X_k\cos x_j'-Y_k\sin x_j', & \theta=1, \quad k=1,\ldots,n,\\ X_k\cos x_j'-Y_k\sin x_j', & \theta=0,\end{cases}$$

где X_k, Y_k — некоррелированные гауссовские последовательности, для которых

$$MX_k = MY_k = 0,\ MX^2 = MY^2 = A^2/2\sigma_0{}^2 \equiv q$$

(σ^2_0 — дисперсия помехи). Фазы опорных колебаний x'_j определяются при помощи (6.4.12), (6.4.14).

Значение порога h определялось с использованием метода экстремальных статистик [164], что позволило снизить число испытаний K на порядок (по сравнению с обычным способом, когда h находится в результате построения статистической функции распределения исследуемой статистики z_n), при этом оно составило $K=10^3$. Вероятность правильного обнаружения D также определялась при $K=10^3$. Исследования проводились при коэффициенте корреляции фазы $R=0{,}5$ и дисперсии $\sigma^2=1$; объем выборки $n=6$. Результаты машинного эксперимента приведены в табл. 8.1, на рис. 8.4 (см. также рис. 8.5.)

В таблице 8.1 представлены результаты для упрощенной (6.4.24), (6.4.25) и исходной (6.4.21), (6.4.23) процедур при отношении сигнал/шум $q=2$, числе каналов $m=3$

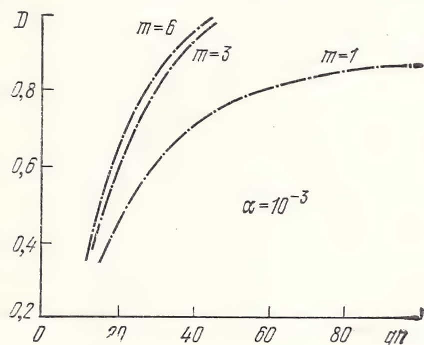


Рис. 8.4

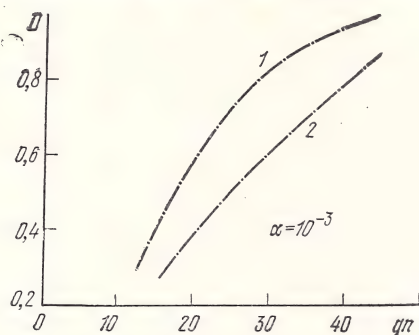


Рис. 8.5

и 6. Вероятности правильного обнаружения для обеих процедур практически одинаковые. Для больших значений D сравнение оказалось невозможным, так как диапазон рабочих сигналов при алгоритме (6.4.21), (6.4.23) превышал возможности используемой ЭВМ. Однако в п. 6.4.4 отмечалось, что наибольшие расхождения между обеими процедурами возникают именно при малых отношениях сигнал/шум, так что результаты табл. 8.1 можно считать достаточными для подтверждения практической эквивалентности обеих процедур.

Таблица 8.1

Алгоритм	D			
	$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 10^{-3}$	
	$m = 3$	$m = 6$	$m = 3$	$m = 6$
Упрощенный	0,57	0,54	0,25	0,22
Исходный	0,57	0,58	0,24	0,24

Рис. 8.4 иллюстрирует влияние числа каналов m на характеристики обнаружения. Исследование проводилось для трех вариантов: $m=1$, 3, 6. Характеристики для трех и шести каналов практически совпадают. Это указывает на то, что при обнаружении рассматриваемого квазигармонического сигнала достаточно иметь трехканальный приемник, построенный согласно (6.4.24), (6.4.25). Одноканальный приемник проигрывает трехканальному при $D=0{,}9$ в отношении сигнал/шум более 5 дБ.

По графикам рис. 8.5 можно судить о том, насколько существенен учет связей между каналами (в рассматриваемом примере). Кривая *1* является характеристикой обнаружителя, состоящего из связанных между собой каналов (6.4.25); кривая *2* — характеристикой обнаружителя, состоящего из несвязанных каналов (6.4.26) (в обоих случаях $m=3$). Второй обнаружитель проигрывает первому в отношении сигнал/шум приблизительно в 1,5 раза.

Глава 9

БАЙЕСОВСКОЕ ОДНОВРЕМЕННОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ

В предыдущих главах уже изучалась задача совместного обнаружения и оценивания сигналов на фоне помех. В данной главе подобная задача рассматривается с несколько иных позиций. Здесь описывается байесовская система совместного обнаружения и оценки при использовании функции потерь, штрафующей одновременно решения об обнаружении и об оценивании сигнала. При этом оценка сигнала (или его параметра) определяется в условиях недостоверного присутствия сигнала в наблюдаемом процессе. Подобная постановка задачи была предложена в [161, 78]. Обобщение на многоальтернативный случай дано в [66, 154]. В [113] рассмотрена байесовская система одновременного обнаружения-оценивания для функции потерь общего вида, не вносящей ограничений на связь между указанными операциями. Анализ систем для различных форм связи между обнаружением и оцениванием проведен в [114].

9.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

9.1.1. Функция потерь общего вида. Рассмотрим ситуацию, когда наблюдаемый процесс $\{y_t\}$, протекающий в дискретном или непрерывном времени, можно классифицировать при помощи двух взаимоисключающих гипотез H_1 и H_0 о наличии ($\theta=1$) или отсутствии ($\theta=0$) полезного сигнала в принимаемом сообщении. Процесс $\{y_t\}$ является смесью стохастического сигнала*) $\{x_t\}$ и шума (при $\theta=1$) или только шумом (при $\theta=0$). Сигнал и шум могут быть как аддитивными, так и неаддитивными, зависимыми или независимыми, могут иметь любые законы распределения. Считаем, однако, что статистические характеристики сигнала и шума полностью известны. Допустим также, что гипотезы H_1 и H_0 относятся ко всей последовательности наблюдений (выборок) $y\equiv\{y_t, 0\leqslant t\leqslant T\}$, а не к их части. При этом в момент времени T на основе всей принятой реализации y в соответствии с решающими правилами обнаружения δ_θ и оценивания δ_x синтезируемая система должна выра-

*) В качестве полезного сигнала может быть взята также детерминированная функция случайного процесса (вообще говоря, векторного) и времени, т. е. $S(x_t, t)$. На общем виде выводимых далее алгоритмов такое представление сигнала не сказывается.

батывать два функционально связанных решения: решение $\delta_\theta(y)=d_\theta$ о значении параметра θ (о наличии или отсутствии сигнала) и решение $\delta_x(y)=d_x$ о значении процесса $\{x_t\}$ в момент времени T. Ограничиваясь нерандомизированным классом решающих функций, запишем выражение для среднего риска

$$R(\delta_\theta,\ \delta_x)=\sum_\theta p_\theta \int_\Gamma \mathbf{M}[C(\theta,\ x_T,\ \delta_\theta(y),\ \delta_x(y))\,|\,y,\ \theta]\,p(y\,|\,\theta)\,dy, \qquad (9.1.1)$$

где p_θ — априорные вероятности наличия ($\theta=1$) и отсутствия ($\theta=0$) сигнала; Γ — пространство наблюдений ($y\in\Gamma$); $C(\theta,\ x,\ \delta_\theta(y),\ \delta_x(y))$ — функция потерь общего вида; $p(y|\theta)$ — функция правдоподобия; $\mathbf{M}[\cdot\,|y,\ \theta]$ — условное математическое ожидание (усреднение проводится по пространству $\Omega\ni x_T$):

$$\mathbf{M}[\cdot\,|\,y,\ \theta]=\int_\Omega(\cdot)\,p_T(x\,|\,y,\ \theta)\,dx.$$

Здесь через $p_T(x|y,\ \theta)$ обозначена АПВ сигнала $\{x_t\}$ в момент T. Отметим, что при $\theta=0$ соответствующую плотность $p_T(x|y,\ \theta=0)$ можно представить в виде дельта-функции.

В байесовской постановке задачи оптимальной является такая система, для которой пара решающих правил δ^*_x и δ^*_θ удовлетворяет условию

$$R(\delta^*_\theta,\ \delta_x^*)=\min_{\delta_\theta,\ \delta_x} R(\delta_\theta,\ \delta_x). \qquad (9.1.2)$$

При этом решающему правилу δ_θ соответствует разбиение пространства наблюдений Γ на два подпространства Γ_0 и Γ_1, так что решения об обнаружении d_1 или необнаружении d_0 принимаются согласно

$$\delta_\theta(y)=\begin{cases} d_0, & \text{если } y\in\Gamma_0,\\ d_1, & \text{если } y\in\Gamma_1, \end{cases} \qquad \Gamma_0\cup\Gamma_1=\Gamma. \qquad (9.1.3)$$

Вид взаимосвязи между обнаружением и оцениванием зависит от выбора функции потерь. В общем случае составляющие функции потерь $C(\theta,\ x,\ \delta_\theta(y),\ \delta_x(y))$ для рассматриваемой задачи при различных комбинациях θ и d_θ можно записать в виде:

$$C(\theta=a,\ x=0,\ d_0,\ d_x)\equiv C_{0001}$$

потери при правильном необнаружении и ложной оценке d_x (запись $x=0$ будет обозначать отсутствие сигнала),

$$C(\theta=0,\ x=0,\ d_1,\ d_x)\equiv C_{0011}$$

потери при ложном обнаружении и ложной оценке d_x,

$$C(\theta=1,\ x,\ d_0,\ d_x)\equiv C_{1101} \qquad (9.14)$$

потери при ложном необнаружении и оценке d_x параметра x,

$$C(\theta=1,\ x,\ d_1,\ d_x)\equiv C_{1111}$$

потери при правильном обнаружении и оценке d_x параметра x.

Перепишем выражение (1) при подстановке в него составляющих функции потерь (4) с учетом (3) и того факта, что АПВ $p_T(x|y, \theta=0)$ — дельта-функция. Используя принятые обозначения, имеем

$$R(\delta_\theta, \delta_x) = p_0 \int_{\Gamma_0} C_{0001} p(y|\theta=0)\,dy + p_0 \int_{\Gamma_1} C_{0011} p(y|\theta=0)\,dy +$$
$$+ p_1 \int_{\Gamma_0}\int_{\Omega} C_{1101} p(y|\theta=1)\, p_T(x|y, \theta=1)\,dydx +$$
$$+ p_1 \int_{\Gamma_1}\int_{\Omega} C_{1111} p(y|\theta=1)\, p_T(x|y, \theta=1)\,dydx. \qquad (9.1.5)$$

Пусть δ_θ — некоторое, не обязательно оптимальное правило обнаружения, в соответствии с которым принимаются решения d_0, d_1 (3). Для получения оценки δ'_x, минимизирующей средний риск при этом правиле (она уже может не быть оптимальной в связи с произволом в выборе δ_θ) перепишем (5) в виде

$$R(\delta_\theta, \delta_x) = \int_{\Gamma_0} \Phi_0(d_0, \delta_x(y))\,dy + \int_{\Gamma_1} \Phi_1(d_1, \delta_x(y))\,dy, \qquad (9.1.6)$$

где

$$\Phi_0(d_0, \delta_x(y)) \equiv p_0 C_{0001} p(y|\theta=0) + p_1 p_T(y|\theta=1) \int_{\Omega} C_{1101} w_T(x)\,dx,$$
$$(9.1.7)$$
$$\Phi_1(d_1, \delta_x(y)) \equiv p_0 C_{0011} p(y|\theta=0) + p_1 p_T(y|\theta=1) \int_{\Omega} C_{1111} w_T(x)\,dx,$$

а $w_T(x) \equiv p_T(x|y, \theta=1)$ (зависимость функционалов Φ_0 и Φ_1 от решений d_θ и $\delta_x(y)=d_x$ содержится в составляющих функции потерь C).

Оценка δ'_x, минимизирующая средний риск при фиксированном δ_θ, является решением уравнения

$$\delta R(\delta_\theta, \delta_x) = \delta\left[\int_{\Gamma_0} \Phi_0(d_0, \delta_x(y))\,dy + \int_{\Gamma_1} \Phi_1(d_1, \delta_x(y))\,dy\right] = 0, \qquad (9.1.8)$$

где δR — вариация функционала R. Введем индикаторы обнаружения $I_0(y)$ и $I_1(y)$:

$$I_0(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in \Gamma_0 \\ 0, & \text{если } y \in \Gamma_1, \end{cases} \qquad I_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in \Gamma_0 \\ 1, & \text{если } y \in \Gamma_1. \end{cases} \qquad (9.1.9)$$

Очевидно, что $I_0(y) + I_1(y) = 1$. Перепишем (8) с учетом (9) в виде

$$\delta R(\delta_\theta, \delta_x) = \delta \int_{\Gamma} [I_0(y)\,\Phi_0(d_0, \delta_x(y)) + I_1(y)\,\Phi_1(d_1, \delta_x(y))]\,dy = 0. \qquad (9.1.10)$$

Используя формулу Эйлера, получаем, что оценка δ'_x есть решение уравнения

$$I_0(y)\frac{\partial}{\partial\delta_x}\Phi_0(d_0, \delta_x) + I_1(y)\frac{\partial}{\partial\delta_x}\Phi_1(d_1, \delta_x) = 0. \qquad (9.1.11)$$

Из (9)—(11) видно, что минимизация среднего риска по правилу оценивания не зависит от выбора границ разбиения пространства Г на

подпространства Γ_0 и Γ_1, а сводится к минимизации соответствующих функционалов на выбранных подпространствах. Если же теперь предположить, что границы разбиения выбраны оптимальным образом, т. е. $\delta_\theta = \delta^*_\theta$, то правило δ^*_x, полученное в результате решения уравнения (11) после подстановки в него индикаторов оптимального обнаружения, будет байесовским. Это позволяет минимизировать выражение для среднего риска (5) раздельно, минимизируя его сначала, например, по правилу обнаружения δ_θ при фиксированном δ_x с подстановкой в полученный алгоритм оптимальной оценки d^*_x вместо d_x, а затем по правилу оценивания δ_x, считая фиксированным δ_θ, с соответствующими подстановками.

В результате, минимизируя (5) обычным методом (см. п. 2.2.1), получаем, что оптимальное правило обнаружения имеет вид

$$\delta^*_\theta(y) = \begin{cases} d_0 \text{ — сигнала нет, если } \Lambda_{gT} < 1, \\ d_1 \text{ — сигнал есть, если } \Lambda_{gT} \geqslant 1, \end{cases} \tag{9.1.12}$$

где

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_T \frac{\int [C(\theta=1, x, d_0, d^*_x) - C(\theta=1, x, d_1, d^*_x)]\, w_T(x)\, dx}{C(\theta=0, x=0, d_1, d^*_x) - C(\theta=0, x=0, d_0, d^*_x)} \tag{9.1.13}$$

— модифицированное отношение правдоподобия (МОП), $\Lambda_T \equiv p(y|\theta=1)/p(y|\theta=0)$ — обычное ОП.

Оптимальная оценка $\delta^*_x(y)$ определяется из (11), если в (11) вместо $I_0(y)$ и $I_1(y)$ (9) подставить соответствующие индикаторы оптимального обнаружения $I^*_0(y)$, $I^*_1(y)$. Учитывая при этом (7), получаем, что $\delta^*_x(y)$ является решением уравнения

$$I^*_1(y) \frac{\partial}{\partial \delta_x} \left[\frac{p_0}{p_1} \frac{C(\theta=0, x=0, d_1, \delta_x)}{\Lambda_T} + \int C(\theta=1, x, d_1, \delta_x)\, w_T(x)\, dx \right] + I^*_0(y) \frac{\partial}{\partial \delta_x} \left[\frac{p_0}{p_1} \frac{C(\theta=0, x=0, d_0, \delta_x)}{\Lambda_T} + \int C(\theta=1, x, d_0, \delta_x)\, w_T(x)\, dx \right] = 0. \tag{9.1.14}$$

Отсюда следует, что оптимальное правило оценивания δ^*_x для функции потерь общего вида вырабатывает оценку не только в том случае, когда обнаружитель принял решение d_1 (сигнал есть), но и тогда, когда он принял решение d_0 (сигнала нет). При этом

$$\delta^*_x(y) = \begin{cases} \delta^*_{x_1}(y) = d^*_{x_1}, & \text{если } \Lambda_{gT} \geqslant 1, \\ \delta^*_{x_0}(y) = d^*_{x_0}, & \text{если } \Lambda_{gT} < 1, \end{cases} \tag{9.1.15}$$

где $\delta^*_{x_1}(y)$ и $\delta^*_{x_0}(y)$ являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \delta_{x_1}} \left[\frac{p_0}{p_1} \frac{C(\theta=0, x=0, d_1, \delta_{x_1})}{\Lambda_T} + \int C(\theta=1, x, d_1, \delta_{x_1})\, w_T(x)\, dx \right] = 0, \tag{9.1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_{x_0}} \left[\frac{p_0}{p_1} \frac{C(\theta=0, x=0, d_0, \delta_{x_0})}{\Lambda_T} + \int C(\theta=1, x, d_0, \delta_{x_0})\, w_T(x)\, dx \right] = 0 \tag{9.1.17}$$

соответственно.

Структурная схема полученной оптимальной системы одновременного обнаружения-оценивания приведена на рис. 9.1; структура блоков обнаружения и оценивания определяется выражениями (12), (13) и (15)—(17) соответственно.

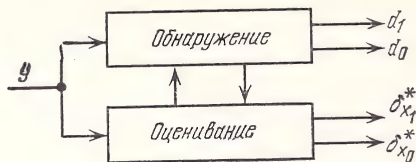


Рис. 9.1

9.1.2. Функция потерь для варианта «сильной» связи. В случае «сильной» связи [78, 161] оценка измерителя отвергается при решении, что сигнала нет. Функцию потерь для «сильной» связи можно получить как частный случай из (4) заменой в составляющих C_{0001} и C_{1101} оценки $\delta_x(y)$ нулем (под $d_x=0$ понимаем случай, когда решение об оценке сигнала не выносится). Что касается составляющих C_{1101} и C_{0011}, то они остаются без изменения.

Алгоритм обнаружения можно получить из (13), используя соответствующие замены:

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_T \frac{\int [C\,[\theta=1,\ x,\ d_0,\ d_x=0) - C\,(\theta=1,\ x,\ d_1,\ d^*{}_x)]\, w_T(x)\, dx}{C\,(\theta=0,\ x=0,\ d_1,\ d^*{}_x) - C\,(\theta=0,\ x=0,\ d_0,\ d_x=0)} \underset{d_0}{\overset{d_1}{\gtrless}} 1. \tag{9.1.18}$$

Так как для случая «сильной» связи предполагается, что $d_x=0$ при $\delta^*{}_\theta\,(y)=d_0$, то оптимальная оценка

$$\delta^*{}_x(y) = \delta^*{}_{x_1}(y), \tag{9.1.19}$$

где $\delta^*{}_{x_1}(y)$ находится из (16).

Структурная схема системы совместного обнаружения-оценивания для «сильной» связи приведена на рис. 9.2, где блоки обнаружения и оценивания обозначены так же, как и на рис. 9.1, однако структура их другая — определяется выражениями (18) и (19) соответственно.

Из сравнения полученных схем видно отличие варианта общей связи (рис. 9.1) от варианта «сильной» связи (рис. 9.2). В последнем случае оценка блока измерения отвергается, если блок обнаружения принял решение d_0 (сигнала нет) и связь обнаружителя с измерителем проявляется в размыкании ключа (K). Но решение d_0 может быть ложным, так как существует ненулевая вероятность пропуска сигнала. При этом процесс $\{x_t\}$ присутствует в наблюдаемых данных y, однако оцениваться не будет.



Рис. 9.2

В отличие от „сильной“ связи при выборе функции потерь общего вида выражение для оптимальной оценки (15) содержит оценку $\delta_{x_0}^*$ сигнала и в том случае, когда обнаружитель принял решение о его отсутствии. Оценка $\delta^*_{x_0}$ является решением уравнения (17). Эта оценка может, например, запоминаться на некотором шаге наблюдения для рекуррентного оценивания на последующем шаге или использоваться для целей вторичной обработки, оставаясь в памяти системы до окон-

чательного выяснения факта наличия полезного сигнала. Из (12), (13) и (15) видно, что в рассматриваемом общем варианте связь обнаружителя с измерителем более тесная, чем в случае «сильной» связи. Из этих выражений можно также получить оптимальные алгоритмы не только для «сильной» связи, но и для других функций потерь, обладающих меньшей степенью общности (например, для вариантов «слабой» связи, а также «без связи», предложенных в [161]).

9.1.3. Примеры. *а) Квадратичная функция потерь общего вида.* Рассмотрим случай, когда функцию потерь можно представить в виде суммы потерь на обнаружение и оценивание.

Пусть

$$\begin{aligned} C_{0011} &= C_\alpha + F_{01}(d_{x_1}) = C_\alpha + C_{01} d^2_{x1}, \\ C_{0001} &= C_{1-\alpha} + F_{00}(d_{x_0}) = C_{1-\alpha} + C_{00} d^2_{x0}, \\ C_{1101} &= C_\beta + F_{10}(x,\ d_{x0}) = C_\beta + C_{10}(x - d_{x0})^2, \\ C_{1110} &= C_{1-\beta} + F_{11}(x,\ d_{x1}) = C_{1-\beta} + C_{11}(x - d_{x1})^2, \end{aligned} \tag{9.1.20}$$

где C_α, $C_{1-\alpha}$, C_β, $C_{1-\beta}$ — потери при ложном обнаружении, правильном необнаружении, пропуске сигнала и правильном обнаружении соответственно; F_{01} и F_{00} — потери за ложную оценку сигнала, когда его нет, а F_{10} и F_{11} — потери за неправильную оценку присутствующего сигнала; C_{01}, C_{00}, C_{10} и C_{11} — положительные константы, характеризующие влияние верного или неверного обнаружения на стоимости оценок *).

Оптимальную оценку δ^*_x получаем в результате решения уравнения (14) при подстановке туда функции потерь (20):

$$\delta^*_x = \frac{(I^*_1 C_{11} + I^*_0 C_{10})\, \widehat{x}_T}{I^*_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \frac{C_{01}}{\Lambda_T} + C_{11} \right) + I^*_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \frac{C_{00}}{\Lambda_T} + C_{10} \right)}, \tag{9.1.21}$$

где $\widehat{x}_T = \int x w_T(x)\, dx$ — БСО сигнала при $\theta = 1$. Раскрывая индикаторы оптимального обнаружения I^*_0 и I^*_1, формулу (21) можно переписать в виде

$$\delta^*_x(y) = \begin{cases} \dfrac{C_{11}\widehat{x}_T}{\frac{p_0}{p_1}\frac{C_{01}}{\Lambda_T} + C_{11}}, & y \in \Gamma^*_1, \\[2ex] \dfrac{C_{10}\widehat{x}_T}{\frac{p_0}{p_1}\frac{C_{00}}{\Lambda_T} + C_{10}}, & y \in \Gamma^*_0. \end{cases} \tag{9.1.22}$$

Положив в (22) константы

$$C_{11} = C_{01} = C_{00} = C_{10} = 1 \tag{9.1.23}$$

*) Рассматриваемые в п. 9.1.3 функции потерь, в частности (20), физически оправданы, если оцениваемый параметр является энергетическим, т. е. когда из равенства $S(x,\ t) = 0$ следует $x = 0$ и наоборот.

(решение обнаружителя не влияет на стоимости оценок), получим решающее правило

$$\delta^*_x = \frac{\Lambda_T}{\Lambda_T + p_0/p_1} \widehat{x_T} = \delta^*_{x_1} = \delta^*_{x_0}, \qquad (9.1.24)$$

при котором оценка $\delta^*_x(y)$ не зависит от решения обнаружителя d_θ, т. е. связь между обнаружителем и измерителем отсутствует. Отметим, что коэффициент, стоящий перед $\hat{x}_T$, есть апостериорная вероятность наличия сигнала $P(\theta=1|y)$.

Запишем выражение для МОП при подстановке (20) в (13):

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_T \frac{C_\beta - C_{1-\beta} + (C_{10} - C_{11}) \widehat{x_T^2} -}{C_\alpha - C_{1-\alpha} +} \to$$

$$\to \frac{-2\widehat{x}_T (C_{10} d^*_{x0} - C_{11} d^*_{x1}) + C_{10} d^{*2}_{x0} - C_{11} d^{*2}_{x1}}{+ C_{01} d^{*2}_{x1} - C_{00} d^{*2}_{x0}}, \qquad (9.1.25)$$

где $\widehat{x_T^2} = \int x^2 w_T(x)\, dx = \mathrm{M}[x_T^2 | y,\ \theta = 1]$.

Если снова использовать (23) с учетом (24) при подстановке в (25), то получим обнаружитель, совпадающий по форме с обычным обнаружителем

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_T \frac{C_\beta - C_{1-\beta}}{C_\alpha - C_{1-\alpha}}. \qquad (9.1.26)$$

В (26) не входит решение оценщика d^*_x (связь между измерителем и обнаружителем также отсутствует). Выражения (24) и (26) совпадают с аналогичными выражениями для варианта «без связи» [161].

Отметим, что в действительности константы, характеризующие влияние верного или неверного обнаружения на стоимости оценок, не равны между собой, а удовлетворяют условию $C_{01} < C_{00}$ и $C_{10} < C_{11}$. Равенство (23) использовано лишь для иллюстрации перехода от связи общего вида к более простым формам связи.

Потери на обнаружение и оценивание могут быть связаны не только аддитивно, но и по-другому, например мультипликативно (функция потерь представляет собой произведение потерь обнаружения и оценивания). Такая зависимость соответствует бóльшим платам за совместную операцию обнаружения-оценивания (при тех же платах за одиночные операции), чем при аддитивной форме записи. Не приводя отдельно составляющие функции потерь в этом случае, отметим, что их получают из (20), заменив знак суммирования на умножение. Алгоритм оптимального измерителя и МОП примут вид

$$\delta^*_x = \frac{(I_1^* C_{1-\beta} C_{11} + I_0^* C_\beta C_{10}) \widehat{x}_T}{I^*_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \frac{C_\alpha C_{01}}{\Lambda_T} + C_{1-\beta} C_{11} \right) + I_0^* \left(\frac{p_0}{p_1} \frac{C_{1-\alpha} C_{00}}{\Lambda_T} + C_\beta C_{10} \right)}, \qquad (9.1.27)$$

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0} \Lambda_T \times$$

$$\times \frac{(C_\beta C_{10} - C_{1-\beta} C_{11}) \widehat{x_T^2} - 2\widehat{x}_T (C_\beta C_{10} d_{x0}^* - C_{1-\beta} C_{11} d^*_{x1}) + C_\beta C_{10} d^{*2}_{x0} - C_{1-\beta} C_{11} d^{*2}_{x1}}{C_\alpha C_{01} d^{*2}_{x1} - C_{1-\alpha} C_{00} d^{*2}_{x0}}.$$

(9.1.28)

Отметим, что если в (27) и (28) использовать (23), то простых алгоритмов, подобных (24) и (26), не получим: здесь существенна зависимость (27) от потерь на обнаружение.

Из (21) и (27) видно, что при квадратичной функции потерь и представлении Λ_T в оценочно-корреляционной форме (см. гл. 7) оптимальная оценка в задаче одновременного обнаружения-оценивания строится на основе БСО $\hat{x}_T$.

б) Квадратичная функция потерь для «сильной» связи. Ее составляющие получаются из соответствующих составляющих квадратичной функции потерь общего вида, как указано в п. 9.1.2. Оптимальная оценка δ^*_x для аддитивной и мультипликативной форм связи между потерями на обнаружение и оценивание получается из (21) и (27) приравниванием нулю той части, которая соответствует решению об отсутствии сигнала. Она для аддитивной связи примет вид

$$\delta^*_x = \frac{C_{11}\hat{x}_T}{(p_0/p_1)(C_{01}/\Lambda_T) + C_{11}} \tag{9.1.29}$$

и для мультипликативной

$$\delta^*_x = \frac{C_{1-\beta}C_{11}\hat{x}_T}{(p_0/p_1)(C_\alpha C_{01}/\Lambda_T) + C_{1-\beta}C_{11}}.$$

Если в (29) положить $C_{01}=C_{11}=1$, получим выражение, аналогичное (24), т. е. $\delta^*_x = P(\theta=1|y)\hat{x}_T$, с той только разницей, что эта оценка отвергается при решении d_0.

В заключение параграфа приведем выражения для МОП в случае «сильной» связи. Для аддитивной связи

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0}\Lambda_T\frac{C_\beta - C_{1-\beta} + (C_{10} - C_{11})\widehat{x_T^2} + 2C_{11}\hat{x}_T d^*_x - C_{11}d^{*2}_x}{C_\alpha - C_{1-\alpha} + C_{01}d^{*2}_x}$$

для мультипликативной

$$\Lambda_{gT} = \frac{p_1}{p_0}\Lambda_T\frac{(C_\beta C_{10} - C_{1-\beta}C_{11})\widehat{x_T^2} + 2C_{1-\beta}C_{11}\hat{x}_T d^*_x - C_{1-\beta}C_{11}d^{*2}_x}{C_\alpha C_{01}d^{*2}_x}.$$

Эти алгоритмы получаются из (25) и (28) соответственно с использованием (19) и $d^*_{x0}=0$.

9.2. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Неинвариантность полученных алгоритмов одновременного обнаружения-оценивания относительно функций потерь, а также сложность схем затрудняет их практическое использование. В связи с этим определенный интерес представляет асимптотическое поведение алгоритмов, например, при неограниченном увеличении отношения сигнал/шум.

Рассмотрим в непрерывном времени ситуацию

$$y_t = \theta x_t + \xi_t, \quad \theta = 0,\ 1; \quad t \in [0, T], \tag{9.2.1}$$

когда на входе приемника присутствуют произвольный стохастический сигнал x_t и белый гауссовский шум ξ_t со спектральной плотностью N

(при $\theta=1$) или один шум (при $\theta=0$). Представим процесс x_t как произведение нормированного случайного процесса x_{t_0} и некоторой детерминированной функции времени, играющей роль амплитудного множителя. Последняя выбирается таким образом, чтобы нормировать среднюю мощность: $\mathbf{M}x^2_{t_0}=1$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$y_t=\theta q\rho_t x_{t_0}+\xi_t,\quad \theta=0,\ 1;\quad t\in[0,\ T], \tag{9.2.2}$$

где детерминированный множитель $q\rho_t=\sqrt{\mathbf{M}x_t^2}$ есть произведение двух величин, одна из которых q представляет собой собственно «амплитуду», а другая — ρ_t определяет возможную нестационарность процесса $\{x_t\}$ (если $\{x_t\}$ стационарен, то $\rho_t=1$).

Для задачи (2) справедливы все полученные в § 9.1 алгоритмы одновременного обнаружения-оценивания. Остановимся далее на варианте «сильной» связи. Прологарифмировав выражение для МОП (9.1.18), запишем

$$\ln\Lambda_{gT}=z_T+\ln\left\{\frac{p_1}{p_0}\,\frac{\int[C_{1100}-C_{1111}]\,w_T(x)\,dx}{C_{0011}-C_{0000}}\right\}, \tag{9.2.3}$$

где обозначено $z_T=\ln\Lambda_T$, $C_{1100}\equiv C(\theta=1,\ x,\ d_0,\ d_x=0)$, $C_{0000}\equiv C(\theta=0,\ x=0,\ d_0,\ d_x=0)$. При этом оптимальное правило обнаружения принимает вид

$$\delta^*_\theta(y)=\begin{cases}d_0, & \text{если } \ln\Lambda_{gT}<0,\\ d_1, & \text{если } \ln\Lambda_{gT}\geqslant 0.\end{cases}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение (3) при больших q ($q\to\infty$) и постоянном N. Рассмотрение начнем со второго члена в правой части (3), обозначим его M_0. Введем некоторые ограничения на составляющие функции потерь. Будем считать, что C_{1100}, C_{1111}, C_{0011} и C_{0000} ограничены при $t\in[0,\ T]$ и существуют такие положительные постоянные a_i и b_i ($i=1,\ 2$), что $a_1\leqslant C_{1100}-C_{1111}\leqslant b_1$ и $a_2\leqslant C_{0011}-C_{0000}\leqslant b_2$. Кроме того, составляющая C_{1111} непрерывна по x и минимальна при $d_x=x$. С учетом этих ограничений получаем, что при любом q

$$|M_0|\leqslant\max\left[\left|\ln\frac{p_1a_1}{p_0b_2}\right|,\ \left|\ln\frac{p_1b_1}{p_0a_2}\right|\right],$$

и, следовательно, при $q\to\infty\,|M_0|=o(q)$. Статистику (3) при больших q можно записать в виде

$$\ln_{q\to\infty}\Lambda_{gT}=\underset{q\to\infty}{z_T}\pm o(q). \tag{9.2.4}$$

Разделив теперь обе части (4) на q, получим при $q\to\infty$

$$z\equiv\ln\Lambda_{gT}/q\to z_T/q\equiv z^*.$$

Из (4) следует сходимость z и z^*, например, в среднеквадратическом (т. е. $\lim\limits_{q\to\infty}\mathbf{M}|z-z^*|^2=0$). Однако при таком подходе к определению предельной статистики обнаружения z^* не следует ограничиваться только доказательством среднеквадратической сходимости z и z^*; необходимо еще выяснить вопрос о невырожденности в нуль алгоритма z^*, т. е.

нужно показать, что $z_T/q \not\to 0$ при $q \to \infty$. Для этого достаточно показать, например, что $Mz_T/q \not\to 0$ при $q \to \infty$ для $\theta = 1$ и 0 соответственно.

Представим теперь ЛП z_T в оценочно-корреляционной форме

$$z_T = \frac{q}{N} \int_0^T \rho_t \hat{x}_{t_0} d^* \bar{y}_t - \frac{q^2}{2N} \int_0^T \rho_t^2 \hat{x}_{t_0}^2 dt, \tag{9.2.5}$$

где $\hat{x}_{t_0} = M[x_{t_0} | y, \ \theta = 1]$, $\bar{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau$.

Обозначим $z_1(T) = z_T$ для $\theta = 1$ и $z_0(T) = z_T$ для $\theta = 0$. Учитывая представление п. 1.4.4, согласно которому при $\theta = 1$

$$d\bar{y}_t = q\rho_t \hat{x}_{t_0} dt + \sqrt{N} d\tilde{\omega}_t,$$

где $\tilde{\omega}_t$ — стандартный винеровский процесс, имеем

$$\frac{z_1(T)}{q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^T \rho_t \hat{x}_{t_0} d^* \tilde{\omega}_t + \frac{q}{2N} \int_0^T \rho_t^2 \hat{x}_{t_0}^2 dt,$$

$$\frac{z_0(T)}{q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^T \rho_t \hat{x}_{t_0} d^* \tilde{\omega}_t - \frac{q}{2N} \int_0^T \rho_t^2 \hat{x}_{t_0}^2 dt.$$

Используя свойство интеграла Ито и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{q \to \infty} \frac{M[z_1(T)]}{q} = 0 + \lim_{q \to \infty} \frac{q}{2N} \int_0^T \rho_t^2 M[\hat{x}_{t_0}^2] dt = +\infty,$$

$$\lim_{q \to \infty} \frac{M[z_0(T)]}{q} = 0 - \lim_{q \to \infty} \frac{q}{2N} \int_0^T \rho_t^2 M[\hat{x}_{t_0}^2] dt = -\infty.$$

Таким образом, алгоритм $z^* = z_T/q$ при $q \to \infty$ не вырождается в нуль, а стремится к $\pm\infty$. Разделив (5) на q, получим асимптотически оптимальный (при $q \to \infty$) алгоритм обнаружения в задаче одновременного обнаружения-оценивания:

$$z^* = \frac{1}{N} \int_0^T \rho_t \hat{x}_{t_0} y_t d^* t - \frac{q}{2N} \int_0^T \rho_t^2 \hat{x}_{t_0}^2 dt. \tag{9.2.6}$$

При этом решения d_0 и d_1 принимаются согласно $z^* \overset{d_1}{\underset{d_0}{\gtrless}} 0$. Под асимптотической оптимальностью здесь понимается асимптотическая эквивалентность (сходимость) статистик обнаружения в среднеквадратическом.

Теперь перейдем к исследованию структуры оптимальной оценки (9.1.19) при $q \to \infty$, полагая, что при большом отношении сигнал/шум (большой апостериорной точности) АПВ $w_T(x)$ сигнала x_T записывается в гауссовском приближении

$$w^*_T(x) = \sqrt{\frac{h_T}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{h_T}{2}(x - \hat{x}^*_T)^2\right\}, \tag{9.2.7}$$

где $\hat{x}^*_T$ — апостериорное среднее, а $1/h_T$ — апостериорная дисперсия.

Воспользовавшись (7), запишем АПВ процесса $\{\rho_t x_{t0}\}$, обозначив предварительно $x_t^0 \equiv \rho_t x_{t0} (x_t^0 = x_t / q)$:

$$w^*_T(x^0) = q \sqrt{\frac{h_T}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{q^2 h_T}{2}\left(x^0 - \frac{\widehat{x}^*_T}{q}\right)^2\right\}. \qquad (9.2.8)$$

Найдем теперь предельную форму байесовской оценки, не прибегая к решению уравнения (9.1.16), минимизирующего функционал Φ_1 (9.1.7) при «сильной» связи. Для этого сведем выражение для минимизации Φ_1 к более удобному виду, заменив переменную при интегрировании ($x = qx^0$) и используя тот факт, что при $q \to \infty$ и $\delta^*_\theta(y) = d_1$ ОП $\Lambda_T \to +\infty$. Оценка δ^*_x при $q \to \infty$ находится из условия

$$\min_{\substack{\delta_x \\ q\to\infty}} \left\{\int C(\theta = 1,\ x,\ d_1,\ \delta_x(y))\, w_T(x^0)\, dx^0\right\} =$$

$$= \min_{\substack{\delta^0_x \\ q\to\infty}} \left\{q \sqrt{\frac{h_T}{2\pi}} \int C(\theta = 1,\ qx^0,\ d_1,\ q\delta_x^0(y)) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{q^2\left[-\frac{h_T}{2}\left(x^0 - \frac{\widehat{x}^*_T}{q}\right)^2\right]\right\} dx^0\right\}, \qquad (9.2.9)$$

где δ_x^0 — оценка процесса $x_T^0 (\delta_x(y) = q\delta_x^0(y))$. Так как выражение, стоящее в квадратных скобках, имеет в области изменения x^0 единственный максимум при $x^0 = \hat{x}^*_T / q$, то к интегралу в правой части (9) можно применить асимптотическую формулу Лапласа [52] при $q \to \infty$. Тогда условие (9) примет вид

$$\min_{\substack{\delta^0_x \\ q\to\infty}} \{\cdot\} = \min_{\delta_x} C(\theta = 1,\ \widehat{x}^*_T,\ d_1,\ \delta_x(y)).$$

Отсюда, принимая во внимание, что функция потерь достигает минимума при $x = \delta_x(y)$, получаем

$$\delta^*_x(y) = \widehat{x}^*_T.$$

Таким образом, байесовской оценкой в условиях априорной неопределенности относительно присутствия сигнала при большой апостериорной точности является среднеквадратическая оценка сигнала при $\theta = 1$. В случае «сильной» связи оценка отвергается при решении обнаружителя об отсутствии сигнала.

Итак, в асимптотике — при большом отношении сигнал/шум ($q \to \infty$) — байесовский алгоритм одновременного обнаружения-оценивания, полученный в § 9.1, переходит в оценочно-корреляционный алгоритм, строящийся на основе ЛП и БСО. Этот результат устанавливает взаимосвязь двух подходов к задаче совместного обнаружения и оценивания.

9.3. АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ

Проведенный выше синтез показал, что байесовские алгоритмы одновременного обнаружения-оценивания являются более сложными, чем алгоритмы, рассмотренные в предыдущих главах. Естественно, что и анализ синтезированных систем усложняется. Трудности анализа алгоритмов одновременного обнаружения-оценивания определяются их су-

щественной нелинейностью (которая проявляется даже при оценивании гауссовского сигнала в белом шуме) и наличием тесной взаимосвязи между различными по характеру операциями. И тем не менее анализ необходим для выяснения следующих естественно возникающих вопросов: когда, при каких условиях и каких формах взаимосвязи между обнаружением и оценкой целесообразно применять байесовские алгоритмы одновременного обнаружения-оценивания? Каково отличие качества работы указанных алгоритмов от качества работы не связанных между собой обнаружителя и измерителя? Можно ли указать квазиоптимальные алгоритмы одновременного обнаружения-оценивания, мало проигрывающие оптимальным в качестве обработки, являющиеся, однако, более простыми?

Ответы на эти вопросы вытекают из приводимых результатов исследований конкретных систем одновременного обнаружения-оценивания сигналов.

9.3.1. Основные соотношения. Качество работы оптимальной системы одновременного обнаружения-оценивания определяется величиной байесовского риска (9.1.2). Последний получается подстановкой оптимальных правил обнаружения и оценивания в выражение для среднего риска.

В целях конкретизации исследований необходимо задать функцию потерь. Примем для дальнейшего рассмотрения аддитивно-квадратичные потери общего вида (9.1.20), положив

$$C_{01}=C_{10}=C_0,\ C_{00}=C_{11}=C_1. \tag{9.3.1}$$

Таким образом, составляющие выбранной функции потерь имеют вид

$$\begin{gathered} C_{0011}=C_\alpha+C_0 d^2_{x_1},\quad C_{1101}=C_\beta+C_0(x-d_{x_0})^2, \\ C_{0001}=C_{1-\alpha}+C_1 d^2_{x_0},\quad C_{1111}=C_{1-\beta}+C_1(x-d_{x_1})^2. \end{gathered} \tag{9.3.2}$$

Константы C_1 и C_0, характеризующие влияние верного и ошибочного решений обнаружителя на стоимости оценок, удовлетворяют соотношению

$$0\leqslant C_0\leqslant C_1. \tag{9.3.3}$$

Оптимальные правила обнаружения δ^*_θ и оценивания δ^*_x для функции потерь (2) согласно (9.1.22), (9.1.25) и (1) имеют вид:

$$\delta^*_\theta(y)=\begin{cases} d_1, & \text{если } \Lambda_{gT}\geqslant 1, \\ d_0, & \text{если } \Lambda_{gT}<1. \end{cases} \tag{9.3.4}$$

$$\delta^*_x(y)=\begin{cases} d^*_{x_1}=\dfrac{C_1\hat{x}_T}{\dfrac{p_0C_0}{p_1\Lambda_T}+C_1}, & \text{если } \Lambda_{gT}\geqslant 1, \\ d^*_{x_0}=\dfrac{C_0\hat{x}_T}{\dfrac{p_0C_1}{p_1\Lambda_T}+C_0}, & \text{если } \Lambda_{gT}<1, \end{cases} \tag{9.3.5}$$

где

$$\Lambda_{gT}=\frac{p_1}{p_0}\Lambda_T\frac{C_\beta-C_{1-\beta}+(C_0-C_1)\widehat{x^2}_T-}{C_\alpha-C_{1-\alpha}+C_0d^{*2}_{x_1}-}\to$$

$$\to\frac{-2\widehat{x}_T(C_0d^*_{x_0}-C_1d^*_{x_1})+C_0d^{*2}_{x_0}-C_1d^{*2}_{x_1}}{-C_1d^{*2}_{x_0}}. \qquad (9.3.6)$$

Учитывая аддитивный характер потерь на обнаружение и оценивание, средний риск $R(\delta_\theta, \delta_x)$ можно представить в виде суммы рисков обнаружения R_D и оценивания R_E. Подставляя функцию потерь (2) в (9.1.6), (9.1.7) и осуществляя разделение, получим выражения для оценочной

$$R_E^{(1)}=\int\limits_{\Gamma_0}[p_0C_1d^2_{x_0}p(y\,|\,\theta=0)+p_1C_0(\widehat{x^2_T}-2\widehat{x}_Td_{x_0}+d^2_{x_0})\,p(y\,|\,\theta=1)]\,dy+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}[p_0C_0d^2_{x_1}p(y\,|\,\theta=0)+p_1C_1(\widehat{x^2_T}-2\widehat{x}_Td_{x_1}+d^2_{x_1})\,p(y\,|\,\theta=1)]\,dy \qquad (9.3.7)$$

и обнаруженческой

$$R_D^{(1)}=p_0C_{1-\alpha}+p_1C_\beta+p_0(C_\alpha-C_{1-\alpha})\,\alpha^{(1)}-p_1(C_\beta-C_{1-\beta})\,D^{(1)} \qquad (9.3.8)$$

составляющих среднего риска (9.1.6). Здесь через $\alpha^{(1)}$ и $D^{(1)}$ обозначены вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения соответственно:

$$\alpha^{(1)}=\int\limits_{\Lambda_{gT}\geqslant 1}p(y\,|\,\theta=0)\,dy;\quad D^{(1)}=\int\limits_{\Lambda_{gT}\geqslant 1}p(y\,|\,\theta=1)\,dy. \qquad (9.3.9)$$

(Верхний индекс в (7)—(9) означает, что соответствующие выражения записаны для аддитивно-квадратичной функции потерь общего вида, при которой оптимальные алгоритмы определяются формулами (4)—(6).)

В ходе анализа в дальнейшем проведем сравнение алгоритмов (4)—(6) с соответствующими алгоритмами для «сильной» связи (оценка d_{x_0} принимается тождественно равной нулю — отвергается), «без связи», а также с системой обнаружения и оценивания, формирующей ОП (Λ_T) и БСО ($\widehat{x}_T$) *).

Указанные формы связи между обнаружением и оцениванием являются частными случаями связи общего вида, и следовательно, анализ соответствующих оптимальных алгоритмов можно проводить, используя соотношения (7)—(9), а также (4)—(6). Так, например, вариант «без связи» получается из общих выражений, если воспользоваться правым предельным соотношением в (3) (т. е. $C_0=C_1$); БСО $\widehat{x}_T$ получается из (5) путем подстановки левой предельной части (3) (т. е. $C_0=0$).

---

*) Оценка $\widehat{x}_T$, оптимальная для квадратичной функции потерь при условии $p_1=1$, будет использоваться в ситуации, когда присутствие сигнала не достоверно, т. е. $p_1<1$.

9.3.2. Анализ оценок. Используя индикаторы оптимального обнаружения

$$I^*_0(y)=\begin{cases}1, & \text{если } \Lambda_{gT}<1,\\ 0, & \text{если } \Lambda_{gT}\geqslant 1,\end{cases}$$

$$I^*_1(y)=\begin{cases}0, & \text{если } \Lambda_{gT}<1,\\ 1, & \text{если } \Lambda_{gT}\geqslant 1,\end{cases} \tag{9.3.10}$$

и подставляя в (7) оптимальные оценки (5), получим оценочную составляющую байесовского риска, которую запишем в виде

$$R_E^{(1)}=\int_\Gamma\left\{I_0^*(y)\left[C_1 d_{x_0}^{*2}+C_0 l_T\left(\widehat{x_T^2}-2\hat{x}_T d_{x_0}^*+d_{x_0}^{*2}\right)\right]\frac{1}{1+l_T}+\right.$$

$$\left.+I_1^*(y)\left[C_0\frac{d_{x_1}^{*2}}{l_T}+C_1\left(\widehat{x_T^2}-2\hat{x}_T d_{x_1}^*+d_{x_1}^{*2}\right)\right]\frac{l_T}{1+l_T}\right\}p(y)\,dy. \tag{9.3.11}$$

Здесь

$$l_T=p_1 p(y\,|\,\theta=1)/p_0 p(y\,|\,\theta=0)=\frac{p_1}{p_0}\Lambda_T,$$

$$p(y)=p_1 p(y\,|\,\theta=1)+p_0 p(y\,|\,\theta=0), \tag{9.3.12}$$

причем

$$\int_\Gamma p(y)\,dy=1, \tag{9.3.13}$$

Форма записи риска в виде интеграла типа

$$J=\int_\Gamma f(y)\,p(y)\,dy \tag{9.3.14}$$

приведена для того, чтобы при расчете (11) можно было бы непосредственно воспользоваться методом Монте-Карло. Согласно этому методу в задаче о приближенном вычислении интеграла (14), где $p(y)$ удовлетворяет условию (13), рассматривается случайная величина Y с плотностью вероятностей $p(y)$ и случайная величина $Z=f(Y)$, математическое ожидание которой равно искомому значению интеграла

$$MZ=\int_\Gamma f(y)\,p(y)\,dy.$$

Если же теперь $y_1, \ldots, y_K$ — независимые значения случайной величины Y и $z_1=f(y_1), \ldots, z_K=f(y_K)$, то оценкой интеграла (14) служит среднеарифметическое

$$\overline{Z}_K=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} z_i. \tag{9.3.15}$$

Эта оценка, как известно, сходится по вероятности к MZ, т. е. к величине интеграла (14).

Применяя указанный метод для вычисления интеграла (11), подаем на вход системы, моделирующей подынтегральную функцию $f(y)$ (выражение в фигурных скобках (11)), K независимых реализаций случайной величины Y с плотностью вероятностей (12) и оцениваем этот интеграл при помощи формулы (15). Моделирование индикаторов оптимального обнаружения (10), представляющих собой ключевые схемы, осуществляется путем формирования МОП (6); через него пропускается выборка y при условии $\theta=0$ или $\theta=1$ и далее полученное значение Λ_{gT} сравнивается с единичным порогом. Оценки $d^*_{x_1}$ и $d^*_{x_0}$, входящие в (6) и (11), формируются согласно (5).

Выражение для оценочной составляющей байесовского риска в случае „сильной" связи $R_E^{(2)}$ получаем из (11) с учетом (5), (6) и того, что $d^*_{x_0}\equiv 0$:

$$R_E^{(2)}=\int\limits_{\Gamma}\left\{I_0^*(y)\,C_0\,\widehat{x_T^2}\,\frac{l_T}{1+l_T}+I_1^*(y)\left[C_0\,\frac{d^{*2}_{x_1}}{l_T}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_1\left(\widehat{x_T^2}-2\hat{x}_T d^*_{x_1}+d^{*2}_{x_1}\right)\right]\frac{l_T}{1+l_T}\right\}p(y)\,dy. \qquad (9.3.16)$$

Как для связи общего вида, так и для «сильной» связи байесовские оценочные риски (11) и (16) зависят от решений обнаружителя d_0 и d_1. Эта зависимость проявляется при формировании индикаторов обнаружения $I^*_0(y)$ и $I^*_1(y)$, причем формируются они в (11) и (16) по-разному благодаря различию в выражениях для МОП Λ_{gT}, соответствующих обеим формам связи.

Подставляя равенство

$$C_0=C_1 \qquad (9.3.17)$$

в (5) и (11), получим байесовский риск оценки в варианте «без связи», т. е. в случае отсутствия связи между обнаружителем и устройством оценивания:

$$R_E^{(3)}=C_1\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{d^{*2}_x}{1+l_T}+\left(\widehat{x_T^2}-2\hat{x}_T d^*_x+d^{*2}_x\right)\frac{l_T}{1+l_T}\right]p(y)\,dy, \qquad (9.3.18)$$

где оценка d^*_x при неопределенности относительно наличия сигнала $(p_1<1)$ имеет вид

$$d^*_x=d^*_{x_1}=d^*_{x_0}=\frac{l_T}{1+l_T}\,\hat{x}_T. \qquad (9.3.19)$$

Приведем также выражения для среднего риска оценки $\hat{x}_T$, полученной в предположении $p_1=1$, используемой, однако, при $p_1<1$

$$R_E^{(4)}=C_1\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\hat{x}_T^2}{1+l_T}+K_T\,\frac{l_T}{1+l_T}\right]p(y)\,dy. \qquad (9.3.20)$$

Здесь $K_T=\mathbf{M}[(x_T-\hat{x}_T)^2\,|y,\ \theta=1]$ — апостериорная дисперсия сигнала. (Соотношение (20) получено из (18) заменой d^*_x на $\hat{x}_T$.) Подчеркнем, что в (20) и (18) не входит решающее правило δ_θ (связь с обнаружителем отсутствует).

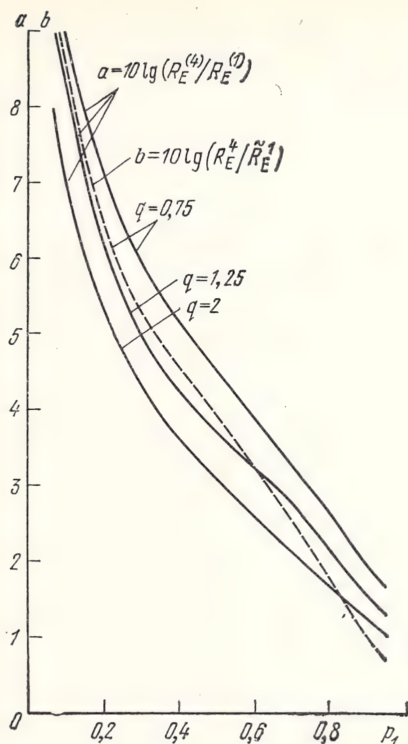


Рис. 9.3

Выражения (11), (16), (18), (20) с учетом (10) и (12) применялись для статистического моделирования на ЭВМ по методу Монте-Карло. В качестве модели сигнала x_t использовался марковский гауссовский процесс, задаваемый уравнением

$$\dot{x}_t = -\gamma x_t + \zeta_t; \quad M\zeta_t\zeta_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau).$$

Сигнал наблюдался на фоне аддитивного белого гауссовского шума ξ_t со спектральной плотностью N. Дискретные аналоги сигнального и шумового процессов с заданными распределениями и параметрами γ, $\varkappa$ и N формировались согласно [12].

В качестве алгоритма, реализующего ОП Λ_T, применялся оценочно-корреляционный алгоритм (4.2.17). Дифференциальные уравнения фильтрации (4.3.12) и (4.3.13) моделировались по методу Эйлера с шагом интегрирования H, равным 0,1. Время интегрирования T полагалось равным $100H$; это означает, что число элементарных отсчетов, образующих вектор y, составляет 101. При расчетах было принято, что

$$C_1 = 10, \quad C_0 = 2{,}5; \quad C_\alpha = 50;$$
$$C_\beta = 10; \quad C_{1-\alpha} = C_{1-\beta} = 0. \qquad (9.3.21)$$

Результаты анализа, отражающие выигрыш оценочной составляющей байесовского риска $R_E^{(1)}$ относительно составляющих $R_E^{(2)}$, $R_E^{(3)}$ и $R_E^{(4)}$ в зависимости от вероятности присутствия сигнала p_1 при различных отношениях сигнал/шум $q=\varkappa/2N\gamma^2$ представлены на рис. 9.3, 9.4.

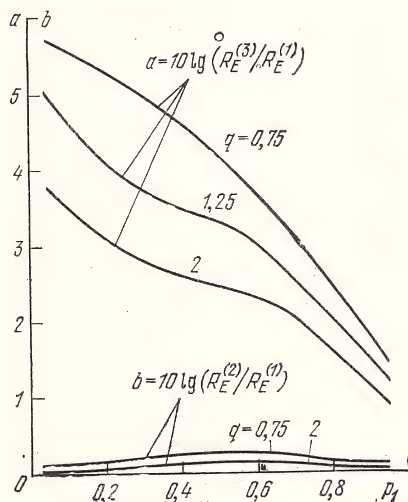


Рис. 9.4

Из графиков видно, что при малых вероятностях p_1 выигрыш достигает сравнительно больших значений: порядка 7—9 дБ относительно БСО $\hat{x}_T$, используемой в ситуации $p_1<1$, и 4—5 дБ относительно оценки d^*_x (19). С ростом p_1 выигрыш уменьшается и при $p_1=0{,}95$ составляет 1—1,5 дБ. Оценка в случае «сильной» связи имеет незначительный проигрыш (рис. 9.4) в величине байесовского риска относительно оценки при связи общего вида (5). Выигрыш оценки (5) относительно других рассматриваемых оценок увеличивается с уменьшением отношения сигнал/шум q. Отметим, что при вариации потерь на обнаружение C_α и C_β получаются зависимости, подобные показанным на рис. 9.3 и 9.4 [114].

Остановимся теперь на квазиоптимальных оценках для связи общего вида и

«сильной» связи, которые отличаются от оптимальных использованием ОП Λ_T вместо МОП Λ_{gT} при формировании индикаторов обнаружения (10). С введением статистики Λ_T устраняется влияние блока оценивания на обнаружитель, в то время как обратная связь (влияние обнаружителя на блок оценивания) остается.

Обозначим оценочную составляющую риска такой квазиоптимальной оценки для связи общего вида через $\tilde{R}_E^{(1)}$. Зависимость выигрыша риска $\tilde{R}_E^{(1)}$ относительно риска $R_E^{(4)}$ от вероятности p_1 при $q=0,75$ приведена на рис. 9.3 пунктирной линией. Из графика видно, что для вероятностей p_1, лежащих в пределах 0,3—0,7, наблюдается ухудшение качества работы квазиоптимального алгоритма по сравнению с оптимальным (5) на 0,5—0,8 дБ. При меньших p_1 это различие уменьшается. Таким образом, при переходе от оптимальной оценки к указанной квазиоптимальной риск увеличивается незначительно, в то время как техническая реализация квазиоптимального алгоритма существенно упрощается.

9.3.3. Анализ обнаружителей. Проанализируем обнаружители для общей и «сильной» связи, а также «без связи», воспользовавшись выражением (8). Риск (8) записывается одинаково для перечисленных выше форм связи; следует только иметь в виду, что вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения (9), входящие в (8), у разных обнаружителей различны. Что касается самих алгоритмов обнаружения, то их можно получить из (4)—(6), используя соответствующие подстановки. Так, например, вариант «без связи» получается подстановкой равенства (17) в (6) с учетом (12), при этом приходим к обычному байесовскому обнаружителю, когда статистика Λ_T сравнивается с порогом

$$\frac{p_0}{p_1}\frac{C_\alpha - C_{1-\alpha}}{C_\beta - C_{1-\beta}}.$$

Используя машинный эксперимент, проанализируем обнаружитель (4). Для расчета вероятности ложной тревоги $\alpha^{(1)}$ на вход устройства, моделирующего МОП по формуле (6), подается K независимых реализаций вектора y при условии $\theta=0$. Результат прохождения каждой из этих реализаций через указанное устройство сравнивается с единичным порогом. Вероятность ложной тревоги рассчитывается по формуле $\alpha^{(1)}=m/K$, где m — число превышений порога. Аналогичным образом при $\theta=1$ вычисляется вероятность правильного обнаружения $D^{(1)}$. Затем по формуле (8) рассчитывается байесовский риск.

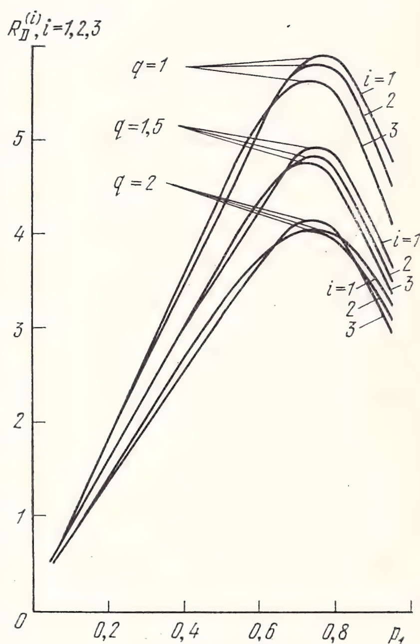


Рис. 9.5

Байесовские риски обнаружения в случае „сильной" связи $R_D^{(2)}$, а также „без связи" $R_D^{(3)}$ вычисляются тем же способом с учетом соответствующих статистик обнаружения и величин порогов. Подчеркнем, что для связи об-

щего вида и „сильной" связи анализируемый алгоритм обнаружения зависит, от оценок $d^*_{x_1}$, $d^*_{x_0}$ и $d^*_{x_1}$ соответственно, моделируемых согласно (5).

Результаты анализа, отражающие зависимость байесовских рисков от вероятности присутствия сигнала p_1 при выполнении (21) для различных отношений сигнал/шум q, приведены на рис. 9.5. При расчетах использовались те же модели сигнала и шума, что и в предыдущем пункте; статистики Λ_T и $\hat{x}_T$ моделировались прежним способом. Время интегрирования T полагалось равным 60Н, число испытаний $K=10^4$.

Из рис. 9.5 видно, что риски обнаружения для различных форм связи мало отличаются один от другого. Подобный же малый разброс рисков имеет место и при вариации потерь C_α и C_β [114].

Итак, проведенный анализ для гауссовских статистик сигналов и шумов показал, что если рассматривать только операцию обнаружения, то синтезированные выше обнаружители, формирующие МОП, не дают выигрыша по сравнению с более простыми обнаружителями, формирующими ОП. В то же время рассмотренные оценки дают существенный выигрыш по сравнению с БСО. Что касается суммарного байесовского риска системы одновременного обнаружения-оценивания, то он, конечно, всегда меньше риска системы, составленной из не связанных между собой обнаружителя и блока оценивания, синтезированного для $p_1=1$, а используемого при $p_1<1$. При этом наименьшим риском обладает система для связи общего вида, незначительно проигрывает ей система для «сильной» связи. Вариант «без связи» и особенно система ОП-БСО обладают значительным проигрышем в величине риска.

Анализ свидетельствует также о возможности применения квазиоптимальных алгоритмов одновременного обнаружения-оценивания (см. п. 9.3.2), обладающих несущественным проигрышем по сравнению с оптимальными в величине суммарного байесовского риска, выигрывающих, однако, в простоте технической реализации.

Глава 10

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

В предыдущих главах при исследовании задач обнаружения предполагалось, что время наблюдения (T) заранее известно (фиксировано). В настоящей главе излагаются методы последовательного обнаружения сигналов, когда время наблюдения заранее не фиксировано.

Отправным пунктом при решении задач последовательного обнаружения служат методы последовательной проверки гипотез (последовательного анализа), разработанные Вальдом [20]. Применению этих методов к задачам обнаружения посвящены работы [7, 11] и др. Дальнейшее развитие идей последовательного анализа имеется в [37, 121, 142, 149].

Отметим, что в прикладных задачах обнаружения в основном используются методы [20], развитые при существенных ограничениях: наблюдения статистически независимы, выборка однородна, причем известна плотность распределения вероятностей наблюдаемой выборки

с точностью до некоторого параметра. В результате задача последовательного обнаружения сводится к задаче последовательной проверки гипотез о значениях параметра некоторого распределения.

В то же время на практике принимаемые сигналы и помсхи являются, вообще говоря, коррелированными стохастическими процессами, при этом указанные ограничения не выполняются. Поэтому представляет интерес разработка методов последовательного обнаружения, для которых ограничения [20] были бы необязательны.

Как будет видно из дальнейшего, в разработке таких методов существенную помощь окажут методы совместного обнаружения и фильтрации, развитые в гл. 4-7. Изложение материала данной главы опирается в основном на работы [109, 110].

10.1. СИНТЕЗ (ВРЕМЕННАЯ ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ)

10.1.1. Общие правила принятия решений. Будем рассматривать задачу последовательного обнаружения в двухальтернативной постановке, когда наблюдаемый процесс $\{y_t,\ t\geqslant 0\}$ представляет собой либо помеху (ситуация $\theta=0$), либо комбинацию полезного сигнала и помехи (ситуация $\theta=1$).

Обозначим через $\tau(\Delta)$ момент прекращения наблюдения, соответствующий решающему правилу $\Delta=\{\delta_\nu,\ \nu\geqslant 0\}$, где $\delta_\nu\equiv\delta_\nu(y_0^\nu)$ — функционал от наблюдаемой реализации $y_0^\nu=\{y_s,\ 0\leqslant s\leqslant\nu\}$, принимающий при фиксированном $\nu\geqslant 0$ одно из трех возможных значений (решений) d_0, d_1, $d_\sim$. Иными словами, $\delta_\nu(y_0^\nu)$ описывает отображение пространства наблюдений $\Gamma_\nu\ni y_0^\nu$ в пространство решений $D=(d_0,\ d_1,\ d_\sim)$. При этом равенство $\delta_\nu(y_0^\nu)=d_\sim$ означает, что в момент времени ν наблюдение продолжается ($\nu<\tau(\Delta)$), а равенство $\delta_\nu(y_0^\nu)=d_j$ означает, что наблюдение прекращается ($\nu=\tau(\Delta)$) и принимается решение, что $\theta=j$, $j=0, 1$. Множество всех функционалов δ_ν описанного вида при фиксированном ν обозначим через δ'_ν, а множество всех решающих правил $\Delta=\{\delta_\nu,\ \nu\geqslant 0\}$, таких, что $\delta_\nu\in\delta'_\nu$, — через Δ'.

Рассматривая задачу в байесовской постановке, зададим функцию потерь в виде

$$c_0=c(\theta,\ \delta_{\tau(\Delta)})+c_1\tau(\Delta), \tag{10.1.1}$$

где функции $c(\theta,\ \delta_{\tau(\Delta)})$ определяет штрафы $0<c(0,\ d_1)<\infty$, $0<c(1,\ d_0)<\infty$ за принятие решений $\delta_{\tau(\Delta)}=d_1$ и $\delta_{\tau(\Delta)}=d_0$, причем положим $c(0,\ d_0)=c(1,\ d_1)=0$ (штраф за принятие правильных решений равен нулю); c_1 — стоимость единицы времени наблюдения. Функцию потерь (1), пропорциональную времени наблюдения $\tau(\Delta)$, будем называть временной.

Для нахождения оптимального последовательного решающего правила рассмотрим будущие потери

$$c_t=c(\theta,\ d_{\tau(\Delta)})+c_1[\tau(\Delta)-t] \tag{10.1.2}$$

и их условное математическое ожидание

$$R(y_0^t,\ \Delta)=\mathrm{M}(c_t\,|\,y_0^t) \qquad (10.1.3)$$

— апостериорный риск.

Оптимальный последовательный обнаружитель должен действовать в соответствии с правилом $\Delta=\Delta^*\subset\Delta'$, при котором условное математическое ожидание будущих потерь (3) для любых t было бы минимальным (принцип оптимальности Беллмана).

Обозначив апостериорную вероятность наличия сигнала $\pi_t=P(\theta=1\,|\,y^t{}_0)$, представим (3) в виде

$$R(y_0^t,\ \Delta)=c(1,\ d_0)\pi_t P(\delta_\tau=d_0\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+$$
$$+c(0,\ d_1)(1-\pi_t)P(\delta_\tau=d_1\,|\,y_0^t,\ \theta=0)+c_1\pi_t\mathrm{M}[(\tau-t)\,|\,y_0^t,\ \theta=1]+$$
$$+c_1(1-\pi_t)\,\mathrm{M}[(\tau-t)\,|\,y_0^t,\ \theta=0] \qquad (10.1.4)$$

(здесь и далее зависимость τ от Δ не выписываем).

Остановимся вначале (для простоты изложения) на случае дискретного времени, когда реализации $y_0^t=\{y_\nu,\ 0\leqslant\nu\leqslant t\}$ и $y_t^\tau=\{y_\nu,\ t<\nu\leqslant\tau\}$ являются конечномерными векторами. Величину $\pi_t P(\delta_\tau=d_0\,|\,y_0^t,\ \theta=1)$, входящую в правую часть (4), можно записать

$$\pi_t P[\delta_\tau(y_0^\tau)=d_0\,|\,y_0^t,\ \theta=1]=\pi_t\int\limits_{\Gamma_t^\tau}\frac{d_1-\delta_\tau(y_0^\tau)}{d_1-d_0}\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\theta=1)\,dy_t^\tau=$$
$$=\pi_t\int\limits_{\Gamma_t^\tau}\frac{d_1-\delta_\tau(y_0^\tau)}{d_1-d_0}\,\frac{p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)}{\pi_t p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+(1-\pi_t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0)}\times$$
$$\times[\pi_t p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+(1-\pi_t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0)]\,dy_t^\tau, \qquad (10.1.5)$$

где Γ_t^τ — множество всех реализаций y_t^τ. Учитывая вытекающие из свойств условных плотностей равенства

$$p(\theta=1,\ y_t^\tau\,|\,y_0^t)=P(\theta=1\,|\,y_0^\tau)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t)=$$
$$=P(\theta=1\,|\,y_0^t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1),$$
$$p(y_t^\tau\,|\,y_0^t)=\pi_t p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+(1-\pi_t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0),$$

имеем

$$\pi_t\,\frac{p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)}{\pi_t p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+(1-\pi_t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0)}=\pi_\tau. \qquad (10.1.6)$$

Подстановка (6) в (5) дает

$$\pi_t P[\delta_\tau(y_0^\tau)=d_0\,|\,y_0^t,\ \theta=1]=\int\limits_{\Gamma_t^\tau}\frac{d_1-\delta_\tau(y_0^\tau)}{d_1-d_0}\,\pi_\tau[\pi_t p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1)+$$
$$+(1-\pi_t)\,p(y_t^\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0)]dy_t^\tau=\pi_t\mathrm{M}\left[\frac{d_1-\delta_\tau(y_0^\tau)}{d_1-\widetilde{d}_0}\,\pi_\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=1\right]+$$
$$+(1-\pi_t)\,\mathrm{M}\left[\frac{d_1-\delta_\tau(y_0^\tau)}{d_1-d_0}\pi_\tau\,|\,y_0^t,\ \theta=0\right]. \qquad (10.1.7)$$

Аналогичным способом найдем

$$(1-\pi_t) P\left[\delta_\tau(y_0^\tau)=d_1 \mid y_0^t,\ \theta=0\right]=\pi_t \mathrm{M}\left[\frac{\delta_\tau(y_0^\tau)-d_0}{d_1-d_0}(1-\pi_\tau) \mid y_0^t,\ \theta=1\right]+$$

$$+(1-\pi_t) \mathrm{M}\left[\frac{\delta_\tau(y_0^\tau)-d_0}{d_1-d_0}(1-\pi_\tau) \mid y_0^t,\ \theta=0\right]. \qquad (10.1.8)$$

Апостериорную вероятность π_t выразим через ЛП $z_t=\ln \frac{p(y_0^t \mid \theta=1)}{p(y_0^t \mid \theta=0)}$ (см. (4.1.9), (4.1,12′)):

$$\pi_t=\frac{\lambda e^{z_t}}{1+\lambda e^{z_t}}, \qquad (10.1.9)$$

где $\lambda=p_1/p_0$, p_1, $p_0=1-p_1$, — априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала. Подставляя теперь (7), (8) в (4) с учетом (9), получаем

$$R(y_0^t,\ \Delta)=\frac{1}{1+\lambda e^{z_t}} \mathrm{M}\left[f_\Delta(\tau-t,\ z_\tau,\ \delta_\tau) \mid y_0^t,\ \theta=0\right]+$$

$$+\frac{\lambda e^{z_t}}{1+\lambda e^{z_t}} \mathrm{M}\left[f_\Delta(\tau-t,\ z_\tau,\ \delta_\tau) \mid y_0^t,\ \theta=1\right], \qquad (10.1.10)$$

где

$$f_\Delta(\tau-t,\ z_\tau,\ \delta_\tau)=c_1(\tau-t)+c(1,\ d_0) \frac{\lambda e^{z_\tau}}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{d_1-\delta_\tau}{d_1-d_0}+$$

$$+c(0,\ d_1) \frac{1}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{\delta_\tau-d_0}{d_1-d_0}. \qquad (10.1.11)$$

Отметим, что при переходе от дискретного времени к непрерывному многократные интегралы в (5), (7) переходят в континуальные, при этом выражение для апостериорного риска сохраняет прежний вид (10).

Учитывая, что в дальнейшем для построения Δ^* используется принцип оптимальности Беллмана, согласно которому в каждый момент времени t «будущие» функционалы $\{\delta_\nu(y_0^\nu),\ \nu \geqslant t\}$ выбираются так, чтобы минимизировался апостериорный риск (10), отметим, что при $t=\tau$ равенство (10) принимает вид

$$R(y_0^\tau,\ \Delta)=c(1,\ d_0) \frac{\lambda e^{z_\tau}}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{d_1-\delta_\tau}{d_1-d_0}+c(0,\ d_1) \frac{1}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{\delta_\tau-d_0}{d_1-d_0}$$

и минимум $R(y_0^\tau,\ \Delta)$ достигается, если

$$\delta_\tau=\begin{cases} d_1 & \text{при } \dfrac{c(1,\ d_0)}{c(0,\ d_1)} \lambda e^{z_\tau} \geqslant 1, \\ d_0 & \text{при } \dfrac{c(1,\ d_0)}{c(0,\ d_1)} \lambda e^{z_\tau}<1. \end{cases} \qquad (10.1.12)$$

В связи с этим ниже будем полагать, что входящий в (10), (11) функционал $\delta_\tau=\delta_\tau(y_0^\tau)$ определяется соотношением (12).

Чтобы облегчить построение оптимального последовательного решающего правила, перейдем к пространству достаточных статистик (см. п. 4.1.4) $\mathbf{z}_t = z_{1t}, \ldots, z_{nt} (z_{it} = Z_{it} | y^t_0, i = 1, \ldots, n)$ — некоторые функционалы, которые достаточны для определения апостериорного риска (10):

$$R(y_0^t, \Delta) = R(\mathbf{z}_t, \Delta). \tag{10.1.13}$$

Из (10)—(12) следует, что (13) выполняется, если одна из компонент $\mathbf{z}_t$, например, z_{1t}, совпадает с ЛП

$$z_{1t} = z_t, \tag{10.1.14}$$

а также имеют место равенства

$$\begin{aligned} p(\tau, z_\tau | y_0^t, \theta = 0) &= p(\tau, z_\tau | \mathbf{z}_t, \theta = 0), \\ p(\tau, z_\tau | y_0^t, \theta = 1) &= p(\tau, z_\tau | \mathbf{z}_t, \theta = 1). \end{aligned} \tag{10.1.15}$$

Соотношения (15) выполняются, если справедливо (14), а сама статистика $\mathbf{z}_t$ является марковской.

Марковость статистики $\mathbf{z}_t$ имеет место, например, в том случае, если для любых $s > t$ значение $\mathbf{z}_s$ при фиксированном $\mathbf{z}_t$ определяется только значениями $\mathbf{z}_t$ и наблюдаемой реализацией $y_t^s = \{y_\nu, t < \nu \leqslant s\}$:

$$\mathbf{z}_s = Z_s(\mathbf{z}_t, y_t^s), \tag{10.1.16}$$

а также справедливы равенства

$$\begin{aligned} p(y_t^s | y_0^t, \theta = 0) &= p(y_t^s | \mathbf{z}_t, \theta = 0), \\ p(y_t^s | y_0^t, \theta = 1) &= p(y_t^s | \mathbf{z}_t, \theta = 1). \end{aligned} \tag{10.1.17}$$

Действительно, из (16) следует, что вероятностное распределение $\mathbf{z}_s$ при фиксированном $\mathbf{z}_t$ $(s > t)$ определяется вероятностным поведением наблюдаемой реализации y_t^s, которое, в свою очередь, на основании (17) определяется только значением $\mathbf{z}_t$ и не зависит от прошлого.

Введенная соотношениями (14), (15) статистика является достаточной в рассматриваемой задаче последовательного обнаружения. Последовательное решающее правило в пространстве достаточных статистик имеет вид

$$\delta_t(\mathbf{z}_t) = \begin{cases} d_0 & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{0t}, \\ d_1 & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{1t}, \\ d_\sim & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{\sim t}. \end{cases} \tag{10.1.18}$$

Задача синтеза оптимального последовательного обнаружителя сводится к нахождению вида статистики $\mathbf{z}_t$, выяснению способа ее формирования и построению областей остановки наблюдения V_{0t}, V_{1t} или их границ G_{0t}, G_{1t} с учетом принятого критерия оптимальности.

Используя марковское свойство $\mathbf{z}_t$, получаем, что в области продолжения наблюдений $V_{\sim t}$ наименьший апостериорный риск

$$S(\mathbf{z}, t) = \inf_{\delta_t^T} R(\mathbf{z}_t, \Delta) \big|_{\mathbf{z}_t = \mathbf{z}}$$

$$(\delta_t^T = \{\delta_\nu, t < \nu \leqslant T\}) \tag{10.1.19}$$

описывается при дискретном времени рекуррентным соотношением

$$S(\mathbf{z},\ t_k)=M[S(\mathbf{z}_{t_{k+1}},\ t_{k+1})\,|\,\mathbf{z}_{t_k}=\mathbf{z}]+c_1(t_{k+1}-t_k),$$
$$k=N-1,\ N-2,\ldots,0, \tag{10.1.20}$$

где $t_N=T$ — момент усечения (вначале рассматриваем T—усеченное решающее правило, для которого $P(\tau(\Delta)\leqslant T)=1$). При этом границы остановки наблюдения G_{0t}, G_{1t} определяются равенствами

$$S(\mathbf{z},\ t_k)|_{\mathbf{z}\in G_{0t_k}}=c(1,\ d_0)\frac{\lambda e^{z_1}}{1+\lambda e^{z_1}}\bigg|_{z_1\in G_{0t_k}};$$
$$S(\mathbf{z},\ t_k)|_{\mathbf{z}\in G_{1t_k}}=c(0,\ d_1)\frac{1}{1+\lambda e^{z_1}}\bigg|_{z_1\in G_{1t_k}}, \tag{10.1.21}$$

а в момент усечения имеем конечное условие

$$S(\mathbf{z},\ T)=\min\left[c(1,\ d_0)\frac{\lambda e^{z_1}}{1+\lambda e^{z_1}},\ c(0,\ d_1)\frac{1}{1+\lambda e^{z_1}}\right]. \tag{10.1.22}$$

Перейдем к непрерывному времени. Устремляя $(t_{k+1}-t_k)=\widetilde{\Delta}\to 0$ и учитывая, что при непрерывном времени достаточные статистики представляют собой диффузионный марковский процесс, из рекуррентного соотношения (20) получаем уравнение с частными производными

$$\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}A_i(\mathbf{z},\ t)\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n}B_{i,\ j}(\mathbf{z},\ t)\frac{\partial^2 S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i\partial z_j}+c_1=0, \tag{10.1.23}$$

где

$$A_i(\mathbf{z},\ t)=\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left[\frac{\widetilde{\Delta}z_i}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z}\right]=\frac{1}{1+\lambda e^{z_1}}\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left(\frac{\widetilde{\Delta}z_i}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z},\ \theta=0\right)+$$
$$+\frac{\lambda e^{z_1}}{1+\lambda e^{z_1}}\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left(\frac{\widetilde{\Delta}z_i}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z},\ \theta=1\right); \tag{10.1.24}$$

$$B_{ij}(\mathbf{z},\ t)=\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left(\frac{\widetilde{\Delta}z_i\widetilde{\Delta}z_j}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z}\right)=$$
$$=\frac{1}{1+\lambda e^{z_1}}\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left(\frac{\widetilde{\Delta}z_i\widetilde{\Delta}z_j}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z},\ \theta=0\right)+$$
$$+\frac{\lambda e^{z_1}}{1+\lambda e^{z_1}}\lim_{\widetilde{\Delta}\to 0}M\left(\frac{\widetilde{\Delta}z_i\widetilde{\Delta}z_j}{\widetilde{\Delta}}\bigg|\,\mathbf{z}_t=\mathbf{z},\ \theta=1\right),\ \widetilde{\Delta}z_i=z_{i,\ t+\widetilde{\Delta}}-z_{i,\ t}. \tag{10.1.25}$$

Как и при дискретном времени, функция $S(\mathbf{z},\ t)$ должна удовлетворять условиям (21) (с заменой t_k на t) и (22), которыми следует дополнить уравнение (23). Кроме того, из-за непрерывности марковского процесса

должны выполняться условия «гладкого склеивания», которые имеют вид

$$\left.\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1}\right|_{\mathbf{z}\in G_{0t}}=\left.\frac{c(1,\ d_0)\,\lambda e^{z_1}}{(1+\lambda e^{z_1})^2}\right|_{z_1\in G_{0t}},$$

$$\left.\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1}\right|_{\mathbf{z}\in G_{1t}}=-\left.\frac{c(0,\ d_1)\,\lambda e^{z_1}}{(1+\lambda e^{z_1})^2}\right|_{z_1\in G_{1t}}, \qquad (10.1.26)$$

$$\left.\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i}\right|_{\mathbf{z}\in G_{0t}}=\left.\frac{\partial S(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i}\right|_{\mathbf{z}\in G_{1t}}=0,\quad i=2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Соотношения (20)—(26) определяют оптимальное T-усеченное последовательное решающее правило при дискретном и непрерывном времени. При $T\to\infty$ они определяют оптимальное неусеченное последовательное решающее правило. Соотношения (20)—(26) дают алгоритмы для нахождения минимального апостериорного риска и границ остановки наблюдения. Последние представляют собой оптимальные «пороги» последовательного обнаружения сигналов.

10.1.2. Достаточные статистики. Теперь выясним конкретный вид и способы нахождения достаточных статистик последовательного обнаружения сигналов.

Рассмотрим тот случай, когда наблюдаемые данные определяются соотношением (5.1.1). Соответствующие этому случаю алгоритмы для АПВ и ОП даются формулами (5.1.3), (5.1.4). Перейдем к ЛП, а также введем достаточные статистики фильтрации $\mathbf{w}_k$ (см. п. 4.1.4). При этом рекуррентные соотношения (5.1.3), (5.1.4) можно записать в виде

$$\mathbf{w}_{k+1}=J_{k+1}(y_{k+1},\ y_k,\ \mathbf{w}_k),$$
$$z_{k+1}=z_k+J'_{k+1}(y_{k+1},\ y_k,\ \mathbf{w}_k). \qquad (10.1.27)$$

Докажем теперь, что статистика

$$\mathbf{z}_k=\{z_k,\ \mathbf{w}_k,\ y_k\} \qquad (10.1.28)$$

удовлетворяет условиям (14), (16), (17), т. е. является достаточной статистикой последовательного обнаружения.

То, что выполняется (14) непосредственно следует из (28). Переписав (27) с учетом (28) в виде

$$\mathbf{z}_{k+1}=I_{k+1}(\mathbf{z}_k,\ y_{k+1}), \qquad (10.1.29)$$

убеждаемся в выполнении (16).

Покажем, что для статистики (28) выполняется и (17). Из (5.1.1) следует, что при $\theta=0$ наблюдаемые данные $\{y_i\}$ являются марковским процессом, так как функция V имеет однозначную обратную функцию, при этом

$$p(y_{k+1}\,|\,y_1^k,\ \theta=0)=p(y_{k+1}\,|\,y_k,\ \theta=0)=p(y_{k+1}\,|\,\mathbf{z}_k,\ \theta=0).$$

Убедимся в выполнении и второго из равенств (17). Для этого запишем применительно к задаче (5.1.1) соотношение типа (4.1.10), а за-

тем перейдем к условной плотности $p(y_{k+1}|y_1^k, \theta=1)$. В результате будем иметь

$$p(y_{k+1}|y_1^k, \theta=1)=\iint \rho_\eta[Q(y_{k+1}, x_{k+1})|Q(y_k, x_k)]\times$$
$$\times Q^*(y_{k+1}, x_{k+1})\pi(x_{k+1}|x_k)w_k(x_k)dx_k dx_{k+1}$$

или

$$p(y_{k+1}|y_1^k, \theta=1)=I'_{k+1}(y_{k+1}, y_k, \mathbf{w}_k). \qquad (10.1.30)$$

Отсюда следует, что

$$p(y_{k+1}|y_1^k, \theta=1)=p(y_{k+1}|y_k, \mathbf{w}_k, \theta=1)=p(y_{k+1}|\mathbf{z}_k, \theta=1), \quad (10.1.31)$$

Итак, статистика (28), определяемая на основании (5.1.3), (5.1.4), является достаточной статистикой последовательного обнаружения случайных сигналов на фоне коррелированных (марковских) помех. В частном случае, когда помеха является случайным процессом с независимыми значениями, y_k в число достаточных статистик не входит. В этом нетрудно убедиться, используя соотношения типа (4.1.21), (4.1.23), справедливые для данного случая. Если к тому же сигнал является детерминированным, то АПВ вырождается в дельта-функцию, при этом достаточной статистикой будет одномерная статистика z_k — ЛП. При марковской помехе и детерминированном сигнале достаточная статистика состоит из двух компонент: $\mathbf{z}_k=\{z_k, y_k\}$. Если обратиться к задаче (5.1.6), когда в наблюдаемом процессе наряду с коррелированной помехой присутствует шум с независимыми значениями, то достаточная статистика примет вид

$$\mathbf{z}_k=\{z_k, \mathbf{w}_{1k}, \mathbf{w}_{0k}\}. \qquad (10.1.32)$$

Здесь $\mathbf{w}_{1k}$, $\mathbf{w}_{0k}$ — достаточные статистики фильтрации, соответствующие апостериорным плотностям $w_{1k}(x_k, \eta_k)$ и $w_{0k}(\eta_k)$, которые определяются соотношениями (5.1.9), (5.1.10). При непрерывном времени, когда наблюдаемые данные имеют вид (5.2.1), достаточными статистиками последовательного обнаружения будут

$$\mathbf{z}_t=\{z_t, \mathbf{w}_{1t}, \mathbf{w}_{0t}\}, \qquad (10.1.33)$$

где достаточные статистики фильтрации $\mathbf{w}_{1t}$, $\mathbf{w}_{0t}$ соответствуют АПВ w_{1t}, w_{0t}, которые описываются уравнениями (5.2.15), (5.2.16). Убедиться в том, что статистики (32), (33), действительно, удовлетворяют условиям (14), (16), (17), можно аналогично предыдущему, используя соотношения (5.1.9)—(5.1.11) и (5.2.15)—(5.2.19).

Отметим, что при дискретном фазовом пространстве параметра сигнала в качестве статистик $\mathbf{w}$, входящих в (28), (32), (33) выступают сами апостериорные вероятности, описываемые соответствующими соотношениями (см. (5.1.12), (5.1.13), (4.1.31), (4.2.33)).

Таким образом, достаточные статистики последовательного обнаружения определяются на основании алгоритмов совместного обнаружения и фильтрации, полученных в гл. 4, 5. В результате указанные алгоритмы позволяют синтезировать обнаружители, оптимальные как при фиксированном, так и при нефиксированном времени наблюдения. В этом состоит одна из важных особенностей развитых в гл. 4, 5 методов совместного обнаружения и фильтрации.

10.1.3. Оптимальный обнаружитель. На рис. 10.1 представлена структурная схема оптимального последовательного обнаружителя сигналов. Сформированные в блоках ОФ и ЛП достаточные статистики (пунктиром отмечен тот факт, что при дискретном времени в число достаточных статистик входит y_k (см. 28)) поступают в решающее пороговое устройство ПУ$_\approx$, алгоритм работы которого задается соотношением (18). Блок оптимальной фильтрации ОФ и блок формирования ЛП совпадают с соответствующими блоками в случае фиксированного времени наблюдения (гл. 4, 5), так что структура оптимальных последователь-

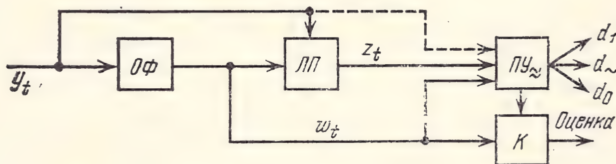


Рис. 10.1

ного и непоследовательного обнаружителей, построенных в рамках метода совместного обнаружения и фильтрации, до порогового устройства одинакова. Что же касается последнего, то здесь имеются существенные отличия. Решающее пороговое устройство ПУ$_\approx$ в задаче последовательного обнаружения значительно сложнее однопорогового ПУ в задаче при фиксированном наблюдении. Кроме того, необходимо подчеркнуть, что на ПУ$_\approx$ подается векторная статистика (ЛП и выходные данные блока фильтрации) в отличие от скалярной (ЛП) в случае фиксированного времени наблюдения.

Принципиальный метод определения структуры ПУ$_\approx$ состоит в следующем. При помощи алгоритмов совместного обнаружения и фильтрации с учетом результатов предыдущего пункта находятся достаточные статистики и уравнения для них в соответствующей задаче последовательного обнаружения. Затем конкретизируются уравнения п. 10.1.1 (см. (20)—(26)), решения которых и определяют границы остановки наблюдения G_{0t}, G_{1t} — оптимальные пороги. В общем случае G_{0t} и G_{1t} представляют собой некоторые гиперповерхности.

Остановимся, например, на задаче обнаружения марковского гауссовского сигнала в белом шуме (при непрерывном наблюдении). Уравнения совместного обнаружения и фильтрации для этого примера даются формулами (4.3.12), (4.3.13), (4.3.15). Поскольку функция h_t не зависит от y_t (см. (4.3.12)), то достаточной статистикой будет $\mathbf{z}_t = \{z_t, m_t\}$. Используя указанные уравнения, подсчитаем коэффициенты (24) и подставим их в (23). В результате получим

$$\frac{\partial S(z, m, t)}{\partial t} + \frac{m^2}{2N}\frac{\lambda e^z - 1}{\lambda e^z + 1}\frac{\partial S(z, m, t)}{\partial z} - m\left[\gamma + \frac{1}{Nh_t(1+\lambda e^z)}\right]\frac{\partial S(z, m, t)}{\partial m} + \frac{m^2}{2N}\frac{\partial^2 S(z, m, t)}{\partial z^2} + \frac{m}{Nh_t}\frac{\partial^2 S(z, m, t)}{\partial z \partial m} + \frac{1}{2Nh_t^2}\frac{\partial^2 S(z, m, t)}{\partial m^2} + c_1 = 0. \qquad (10.1.34)$$

Решая уравнение (24) с учетом условий (21), (22), (25), (26), можно в принципе найти оптимальные границы G_{0t}, G_{1t} как для усеченного, так и для неусеченного

(устремив $T \to \infty$) последовательного обнаружения. Эти границы определяют пороги устройства $ПУ_{\approx}$, которое выносит решение согласно (18). Остальная часть приемника (до $ПУ_{\approx}$) совпадает со схемой рис. 4.3 (до ПУ).

Отличительная особенность поставленных краевых задач для уравнения (23) и для (34) состоит в том, что область, в которой отыскивается решение уравнения, заранее неизвестна. В теории уравнений с частными производными задачи такого типа называются задачами с подвижными границами или обобщенными задачами Стефана [149]. Отыскание аналитического решения подобных задач — весьма трудная проблема. В частности, получить решение такой краевой задачи для (34) не удается. Однако можно указать примерный вид порогов, исходя из свойств минимального апостериорного риска $S(z, m, t)$ [109] *).

10.1.4. Асимптотически оптимальный обнаружитель. В связи с отмеченными трудностями нахождения границ остановки оптимальных последовательных процедур, важной является задача построения квазиоптимальных и асимптотически оптимальных последовательных процедур и, в частности, процедур, основанных на одномерной статистике ЛП.

Уравнение для ЛП z_t в общем случае имеет вид (8.2.26). При выполнении условий

$$P(\tau \geqslant \tau_{k_0} | \theta=0) \sim 1; \quad P(\tau \geqslant \tau_{k_1} | \theta=1) \sim 1 \tag{10.1.35}$$

(ср. с (8.2.28)) немарковский случайный процесс $\{z_i, \theta=j\}$, $j=0,1$ можно приближенно заменить (аппроксимировать) марковским процессом. В этом случае одномерную статистику z_t можно приближенно рассматривать как достаточную. Других статистик, дополняющих z_t до марковского процесса, здесь не требуется, поскольку процесс z_t уже сам по себе является марковским (приближенно). Если же ЛП представляет собой однородный марковский процесс, то функция S, описываемая уравнением (23), зависит только от одной координаты ($S(z)$). При этом байесовское неусеченное последовательное решающее правило принимает вид

$$\delta_t(z_t) = \begin{cases} d_0 & \text{при } z_t = a, \\ d_1 & \text{при } z_t = b, \\ d_{\sim} & \text{при } a < z_t < b, \end{cases} \tag{10.1.36}$$

где a и b — некоторые константы (пороги).

Пороги a, b определяются следующим образом. Случайный процесс $\{z_t, \theta=j\}$ аппроксимируется марковским процессом с постоянными коэффициентами переноса M_j и диффузии K_j ($j=0, 1$), зависящими от параметров конкретной задачи. При этом уравнение (23) принимает вид

$$\frac{(M_0 + M_1 \lambda e^z)}{1+\lambda e^z} \frac{\partial S(z)}{\partial z} + \frac{(K_0 + K_1 e^z)}{2(1+\lambda e^z)} \frac{\partial^2 S(z)}{\partial z^2} + c_1 = 0.$$

Записывая общее решение этого уравнения и используя граничные условия (21), (25), нетрудно получить систему двух трансцендентных уравнений для нахождения границ a, b. Получающиеся выражения громозд-

---

*) В ряде случаев блок $ПУ_{\approx}$ представляет собой двухпороговое устройство с переменными порогами, управляемыми выходными сигналами блока ОФ.

ки и здесь не приводятся. Отметим только, что указанные уравнения при выполнении условий

$$M_1=-M_0=0{,}5K=0{,}5K_1$$

(см. (8.2.66)) переходят в соответствующие уравнения работ [121, 149], которые получены при решении задачи обнаружения постоянного сигнала в белом шуме. Но даже и в этом случае для решения трансцендентных уравнений (с целью определения порогов) приходится привлекать численный метод.

Описанный способ определения порогов, помимо громоздкости, малоудобен для практических задач обнаружения сигналов еще и потому,

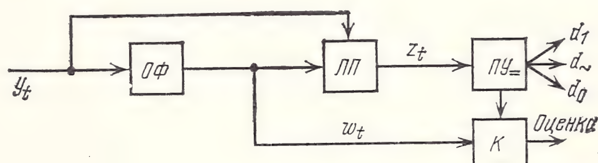


Рис. 10.2

что при таком определении пороги a и b зависят от величины штрафов $c(\theta,\ \delta_\tau)$ и априорных вероятностей гипотез p_0, p_1 (что вполне естественно для байесовской постановки задачи). Поэтому на этом способе мы подробно не останавливаемся. В дальнейшем в связи с решением задачи анализа последовательных обнаружителей будет рассмотрен другой метод определения порогов, более приемлемый для практики.

Условие (35) позволяет осуществлять лишь приближенную замену ЛП марковским (винеровским) процессом. Однако можно воспользоваться и асимптотически точным результатом, согласно которому существуют условия сходимости ЛП к винеровскому процессу (см. п.8.2.4). При выполнении этих условий ЛП является асимптотически достаточной статистикой последовательного обнаружения, а решающее правило (36) — асимптотически оптимальным.

На рис. 10.2 представлена структурная схема последовательного обнаружителя, работающего в соответствии с правилом (36). От оптимальной схемы (рис. 10.1) этот обнаружитель отличается структурой решающего порогового устройства ПУ=, которое здесь является двухпороговым с постоянными порогами, а также тем, что на ПУ= не поступает никаких других статистик, кроме ЛП.

В том частном случае, когда ЛП является достаточной статистикой (как показано в п. 10.1.2, это будет при обнаружении детерминированного сигнала в шуме с независимыми значениями) и, кроме того, представляет собой однородный марковский процесс (что будет при постоянном сигнале), схема рис. 10.2 осуществляет оптимальное неусеченное последовательное обнаружение (блок ОФ в этом случае вырожден).

В общем же случае ЛП не является достаточной статистикой, при этом обнаружитель рис. 10.2 не является оптимальным. В общем случае оптимальным последовательным обнаружителем будет приемник, изображенный на рис. 10.1. Однако при выполнении (35) обнаружитель рис. 10.2 реализует последовательную процедуру, слабо отличающуюся от оптимальной, при этом он является квазиоптимальным обнаружите-

лем. Если же потребовать выполнения условий (8.2.50), (8.2.53), (8.2.54), то двухпороговый последовательный обнаружитель (рис. 10.2) в этих условиях является асимптотически оптимальным.

В заключение отметим, что как в схеме рис. 10.1, так и в схеме рис. 10.2 в течение всего процесса приема на выходе ОФ, в частности, последовательно формируется оптимальная оценка полезного сигнала (при $\theta=1$). После вынесения решения d_1 эта оценка формируется и на выходе блока К. Таким образом, рассмотренные системы осуществляют совместное последовательное обнаружение и фильтрацию сигналов. Собственно, метод совместного обнаружения и фильтрации, изложенный в гл. 4, 5, и позволил указать конструктивный метод построения оптимального последовательного обнаружителя.

10.2. СИНТЕЗ (ИНФОРМАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПОТЕРЬ)

10.2.1. Апостериорный риск и достаточные статистики. Временная функция потерь (10.1.1) не учитывает в явном виде стоимость информации, поступающей на вход обнаружителя; при этом информационная природа процесса обработки наблюдаемых данных непосредственно во внимание не принимается. На мысль о целесообразности учета стоимости информации наталкивает и то, что в задаче обнаружения (при фиксированном времени наблюдения) вероятности ошибок 1-го и 2-го рода непосредственно связаны со средней информацией (см. п. 8.2.5).

Эти соображения приводят к следующей функции потерь [110]:

$$J_0 = c(\theta, \delta_{\tau(\Delta)}) + c_1 I(y_0^{\tau(\Delta)}), \tag{10.2.1}$$

где первое слагаемое $c(\theta, \delta_{\tau(\Delta)})$ — то же, что и в (10.1.1); $I(y_0^{\tau(\Delta)})$ — информация о значении параметра $\theta=0, 1$, содержащаяся в наблюдаемых данных $y_0^{\tau(\Delta)}$ ($I(y_0^{\tau(\Delta)})$ — некоторый функционал, который определен далее); c_1 — стоимость единицы информации. Таким образом, второе слагаемое в первой части (1) отражает стоимость информации, поступающей на вход обнаружителя за время наблюдения $[0, \tau(\Delta)]$. В связи с этим функцию потерь J_0 можно назвать «информационной».

При байесовской постановке задачи требуется найти оптимальное решающее правило $\Delta=\Delta^*$, минимизирующее средний информационный риск

$$R(\Delta) = MJ_0 = Mc(\theta, \delta_{\tau(\Delta)}) + c_1 MI(y_0^{\tau(\Delta)}). \tag{10.2.2}$$

Так как здесь рассматривается задача обнаружения, то информацию $I(y_0^s)$ естественно определить по Кульбаку (как и в п. 8.2.5), положив для любого $s>0$ (в том числе для $s=\tau(\Delta)$)

$$I(y_0^s) = \begin{cases} z_s & \text{при } \theta=1; \\ -z_s & \text{при } \theta=0, \end{cases} \tag{10.2.3}$$

где $z_s = \ln[p(y_0^s \mid \theta=1)/p(y_0^s \mid \theta=0)]$ — ЛП.

Поясним смысл второго слагаемого в (2) на примере обнаружения детерминированного сигнала S_t в аддитивном белом шуме интенсивности N, когда, как нетрудно убедиться, $MI(y_0^{\tau(\Delta)}) = (2N)^{-1} M \int_0^{\tau(\Delta)} S_t^2 dt$; т. е. в данном случае средняя информа-

ция равна отношению средней энергии сигнала к удвоенной интенсивности шума. В частном случае $S_t \equiv S = \text{const}$ второе слагаемое в (2) прямо пропорционально среднему времени обнаружения: $c_1 M I_0 (y_0^{\tau(\Delta)}) = \tilde{c} M\tau(\Delta)$ (здесь $\tilde{c} = c_1 S^2/2N$). При этом (2) совпадает со средним риском при временной функции потерь. Для более общих задач такого совпадения нет.

Возвращаясь к общему случаю произвольных сигналов и помех, рассмотрим будущие потери

$$J_t = c(\theta,\ \delta_{\tau(\Delta)}) + c_1 [I(y_0^{\tau(\Delta)}) - I(y_0^t)]$$

и апостериорный риск $R(y_0^t, \Delta) = M(J_t | y_0^t)$. Используя (2) и преобразуя апостериорный риск аналогично тому, как это делалось при выводе (10.1.10), получим

$$R(y_0^t,\ \Delta) = \frac{1}{1+\lambda e^{z_t}} M(\varphi_\Delta(z_\tau,\ \delta_\tau) | y_0^t,\ \theta = 0) +$$

$$+ \frac{\lambda e^{z_t}}{1+\lambda e^{z_t}} M(\varphi_\Delta(z_\tau,\ \delta_\tau) | y_0^t,\ \theta = 1) - \frac{c_1}{1+\lambda e^{z_t}} M(z_\tau - z_t | y_0^t,\ \theta = 0) +$$

$$+ \frac{c_1 \lambda e^{z_t}}{1+\lambda e^{z_t}} M(z_\tau - z_t | y_0^t,\ \theta = 1), \qquad (10.2.4)$$

где

$$\varphi_\Delta(z_\tau,\ \delta_\tau) = c(1,\ d_0) \frac{\lambda e^{z_\tau}}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{d_1 - \delta_\tau}{d_1 - d_0} + c(0,\ d_1) \frac{1}{1+\lambda e^{z_\tau}} \frac{\delta_\tau - d_0}{d_1 - d_0}$$

(зависимость τ от Δ не выписываем). Отметим, что входящий в (4) функционал $\delta_\tau = \delta_\tau(y_0^\tau)$ определяется соотношением (10.1.12) (в силу тех же причин, что и в п. 10.1.1).

Перейдем теперь к достаточным статистикам $z_t = (z_{1t}, \ldots, z_{nt})$. Из (4) и (10.1.12) следует, что статистика z_t будет достаточной (для определения апостериорного риска, см. (10.1.13)), если одна из компонент z_t совпадает с ЛП, т. е. если имеет место (10.1.14), а также выполняются следующие равенства для апостериорных плотностей:

$$p(z_\tau - z_t,\ z_\tau | y_0^t,\ \theta = j) = p(z_\tau - z_t,\ z_\tau | z_t,\ \theta = j), \quad j = 0,\ 1 \qquad (10.2.5)$$

(ср. с (10.1.15)). Достаточным условием справедливости (5) является выполнение равенства (10.1.14) и марковость статистики z_t при обеих гипотезах. Следует однако подчеркнуть, что статистика z_t может быть достаточной для определения наименьшего апостериорного риска, но не быть марковской.

Решающее правило δ_τ в пространстве достаточных статистик имеет вид (10.1.18). Синтез оптимального обнаружителя сводится к нахождению алгоритма формирования статистики z_t и к определению областей остановки наблюдения, при которых апостериорный риск (4) в каждый момент времени t был бы минимальным

$$\inf_{\{\delta_\nu^{\ast},\ \nu > t\}} R(y_0^t,\ \Delta) = \inf_{\{\delta_\nu,\ \nu > t\}} R(z_t,\ t) = S(z_t,\ t). \qquad (10.2.6)$$

10.2.2. Оптимальное обнаружение произвольного сигнала в белом шуме. Дальнейшее решение задачи синтеза требует конкретизации наблюдаемого процесса $\{y_t,\ t\geqslant 0\}$. Будем полагать, что

$$y_t = \theta x_t + \xi_t, \quad \theta = 0,\ 1, \tag{10.2.7}$$

где x_t — произвольный стохастический сигнал; ξ_t — белый шум интенсивности N.

Рассмотрим вначале T-усеченные решающие правила Δ_T, для которых время обнаружения $\tau(\Delta_T)$ с вероятностью единица ограничено фиксированной величиной $T<\infty$: $P(\tau(\Delta_T)\leqslant T)=1$. Используя выражение для ЛП в задаче (7) (см. например, (8.2.45)), свойства условного математического ожидания и стохастического интеграла Ито, найдем

$$\mathbf{M}(z_{\tau_T} - z_t \,|\, y_0^t,\ \theta=0) = -\frac{1}{2N}\mathbf{M}\left(\int\limits_t^{\tau_T} m_s^2 ds \,|\, y_0^t,\ \theta=0\right),$$

$$\mathbf{M}(z_{\tau_T} - z_t \,|\, y_0^t,\ \theta=1) = \frac{1}{2}\mathbf{M}\left(\int\limits_t^{\tau_T} m_s^2 ds \,|\, y_0^t,\ \theta=1\right), \tag{10.2.8}$$

где

$$m_s = \mathbf{M}(x_s \,|\, y_0^s,\ \theta=1), \qquad \tau_T \equiv \tau(\Delta_T).$$

Подстановка (8) в (4) дает

$$R(y_0^t,\ \Delta) \equiv R_T(y_0^t) = \mathbf{M}(\varphi_\Delta(z_{\tau_T},\ \delta_{\tau_T})\,|\, y_0^t) + \frac{c_1}{2N}\mathbf{M}\left(\int\limits_t^{\tau_T} m_s^2 ds \,|\, y_0^t\right), \tag{10.2.9}$$

где учтено, что

$$\mathbf{M}(\cdot\,|\,y_0^t) = (1+\lambda e^{z_t})^{-1}\mathbf{M}(\cdot\,|\,y_0^t,\ \theta=0) + \lambda e^{z_t}(1+\lambda e^{z_t})^{-1}\mathbf{M}(\cdot\,|\,y_0^t,\ \theta=1).$$

Далее воспользуемся методом марковской аппроксимации (см. п. 7.1.1) предполагая, что полезный сигнал x_t является компонентой многомерного диффузионного марковского процесса $\mathbf{x}_t=(x_{1t},\ \ldots,\ x_{lt})$, где $x_{1t}\equiv x_t$; $l\geqslant 1$. Рассмотрим многомерную статистику

$$\mathbf{z}_t = \{z_t,\ \mathbf{w}_t\}, \tag{10.2.10}$$

где $z_t\equiv z_{1t}$—ЛП, а

$$\mathbf{w}_t = \{w_{1t} \equiv m_t = z_{2t}, \quad w_{2t} = z_{3t}, \ldots,\ w_{n-1,\,t} = z_{nt}\}$$

— достаточные статистики фильтрации ($m_t=\mathbf{M}(x_t|y_0^t,\ \theta=1)$). Стохастические уравнения (для компонент статистики (10)) совместного обнаружения и фильтрации имеют вид (в форме Ито):

$$\dot z_t = \frac{1}{N} m_t y_t - \frac{1}{2N} m_t^2;$$

$$\dot w_{it} = f_{it}(\mathbf{w}_t)\, y_t + F_{it}(\mathbf{w}_t), \quad i=2,\ldots,\ n, \tag{10.2.11}$$

где $f_{it}(\cdot)$, $F_{it}(\cdot)$ — функции, определяемые конкретной задачей.

Статистика (10) является марковской при обеих гипотезах и для нее выполняется (10.1.14); следовательно, выполняется (5) и эта стати-

стика является достаточной. Поступая далее так же, как и при получении (10.1.23), используя при этом (9), (11), найдем, что функция наименьшего апостериорного риска

$$S_T(\mathbf{z},\ t)=S_T(\mathbf{z}_t,\ t)\big|_{\mathbf{z}_t=\mathbf{z}}$$

в области продолжения наблюдений $V_{\sim t}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial t}+\frac{m^2}{2N}\,\frac{\lambda e^{z_1}-1}{\lambda e^{z_1}+1}\,\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1}+\frac{m^2}{2N}\,\frac{\partial^2 S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1^2}+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}\left[F_{it}(\mathbf{w})+\frac{\lambda e^{z_1}}{1+\lambda e^{z_1}}mf_{it}(\mathbf{w})\right]\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i}+$$
$$+\sum_{i=2}^{n}mf_{it}(\mathbf{w})\frac{\partial^2 S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1\partial z_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ k=2}^{n}N^2 f_{it}(\mathbf{w})f_{kt}(\mathbf{w})\frac{\partial^2 S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i\partial z_k}+c_1\frac{m^2}{2N}=0, \tag{10.2.12}$$

а на границах G_{0t}, G_{1t} (которые подлежат определению) имеют место равенства

$$S_T(\mathbf{z},\ t)\big|_{G_{jt}}=\varphi_j(z_1)\big|_{G_{jt}},$$
$$\left.\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1}\right|_{G_{jt}}=\left.\frac{\partial\varphi_j(z_1)}{\partial z_1}\right|_{G_{jt}},\quad j=0,\ 1; \tag{10.2.13}$$
$$\left.\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_1}\right|_{G_{0t}}=\left.\frac{\partial S_T(\mathbf{z},\ t)}{\partial z_i}\right|_{G_{1t}}=0,\quad i=2,\dots,\ n;$$
$$S_T(\mathbf{z},\ T)=\min\left[\varphi_0(z_1),\ \varphi_1(z_1)\right], \tag{10.2.14}$$

где $\varphi_0(z_1)=c(1,\ d_0)\lambda e^{z_1}(1+\lambda e^{z_1})^{-1}$, $\varphi_1(z_1)=c(0,\ d_1)(1+\lambda e^{z_1})^{-1}$.

Отметим, что уравнение (12) отличается от уравнения (10.1.23) (если последнее конкретизировать согласно (10.1.24) с учетом (11)) лишь наличием в левой части члена $c_1m^2/2N$, появление которого обязано информационной функции потерь (аналогом этого члена в (10.1.23) является константа c_1 — стоимость единицы времени наблюдения).

Нахождение оптимального T-усеченного решающего правила требует решения краевой задачи (12)—(14), что представляет весьма сложную проблему. Далее мы ограничимся случаем $T\to\infty$ (неусеченное последовательное обнаружение).

Исследование показывает, что если оптимальное неусеченное решающее правило с вероятностью единица имеет конечное время обнаружения, то в (12), (13) можно перейти к пределу ($T\to\infty$), при этом предельная функция

$$S_\infty(\mathbf{z},\ t)=\lim_{T\to\infty}S_T(\mathbf{z},\ t)$$

удовлетворяет неравенствам [110]

$$0<S_\infty(\mathbf{z},\ t)<\infty.$$

Нетрудно видеть, что при $T=+\infty$ решением краевой задачи (12), (13) («конечное» условие (14) при $T=+\infty$ теряет смысл) является функция одного переменного

$$S_\infty(z_1,\dots,\ z_n,\ t)=S_\infty(z_1). \tag{10.2.15}$$

Действительно, подставляя (15) в (12), (13) и заменяя переменную $z_1 = \ln[\pi/\lambda(1-\pi)]$, получаем краевую задачу для предельной функции $S_\infty(z_1) = S_\infty\left(\ln\frac{\pi}{\lambda(1-\pi)}\right) \equiv \widetilde{S}_\infty(\pi)$:

$$\pi^2(1-\pi)^2\frac{\partial^2 S_\infty(\pi)}{\partial\pi^2} + c_1 = 0,$$

$$\widetilde{S}_\infty(\pi)\big|_{\widetilde{G}_{0t}} = c(1, d_0)\pi\big|_{\widetilde{G}_{0t}}, \quad \widetilde{S}_\infty(\pi)\big|_{\widetilde{G}_{1t}} = c(0, d_1)(1-\pi)\big|_{\widetilde{G}_{1t}},$$

$$\frac{\partial\widetilde{S}_\infty(\pi)}{\partial\pi}\bigg|_{\widetilde{G}_{0t}} = c(1, d_0), \quad \frac{\partial\widetilde{S}_\infty(\pi)}{\partial\pi}\bigg|_{\widetilde{G}_{1t}} = -c(0, d_1),$$

решение которой, как известно (см., например, [149, с. 176]) существует и имеет вид

$$S_\infty\left(\ln\frac{\pi}{\lambda(1-\pi)}\right) = g(A) + (\pi - A)[c(1, d_0) - c_1\psi_2(A)] + c_1[\psi_1(\pi) - \psi_1(A)]. \tag{10.2.16}$$

Здесь $g(\pi) = \min[c(1, d_0)\pi, c(0, d_1)(1-\pi)]$,

$$\psi_1(\pi) = (1-2\pi)\ln\frac{\pi}{1-\pi},$$

$$\psi_2(\pi) = \frac{1-\pi}{\pi} - \frac{\pi}{1-\pi} + 2\ln\frac{1-\pi}{\pi}$$

— известные функции, величины A и B (границы G_{0t}; G_{1t}) являются решением системы трансцендентных уравнений

$$\begin{gathered} c(0, d_1) + c(1, d_0) = c_1[\psi_2(A) - \psi_2(B)], \\ c(0, d_1)(1-B) = c(1, d_0)A + (B-A)[c(1, d_0) - \\ - \psi_2(A)] + c_1[\psi_1(B) - \psi_1(A)], \end{gathered} \tag{10.2.17}$$

причем они связаны с границами G_{0t}, G_{1t} (оптимальными порогами), представляющими собой в данном случае константы, равные a и b соответственно, равенствами:

$$a = \ln\frac{A}{\lambda(1-A)}; \qquad b = \ln\frac{B}{\lambda(1-B)}. \tag{10.2.18}$$

Из (16)—(18) видно, что при $T = +\infty$ решение краевой задачи (12), (13) не зависит от количества компонент (l и n) процессов $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{z}_t$. Отсюда, учитывая аппроксимирующие свойства марковских процессов, убеждаемся в справедливости формул (16)—(18) для произвольного сигнала $\{x_t\}$ в (7).

Соотношение (16) показывает, что наименьший апостериорный риск (6) зависит от y_0^t только через посредство статистики ЛП

$$z_t = \ln[\pi_t|\lambda(1-\pi_t)].$$

Таким образом, при байесовской постановке задачи и информационной функции потерь одномерная статистика ЛП является достаточной, решающее устройство — двухпороговым, а алгоритм работы оптимального последовательного обнаружителя (10.1.18) принимает вид

$$\delta_t(z_t) = \begin{cases} d_0 & \text{при } z_t = a, \\ d_1 & \text{при } z_t = b, \\ d_\sim & \text{при } a < z_t < b. \end{cases} \tag{10.2.19}$$

Отметим, что учет информационных потерь привел к оптимальному алгоритму (19), который значительно проще оптимального алгоритма при временной функции потерь (последняя приводит к довольно сложному решающему пороговому устройству, см. п. 10.1.3). Величина порогов a и b, как видно из (15), (18), определяется только параметрами $c(0, d_1)$, $c(1, d_0)$, c_1, $\lambda=p_1/p_0$ и не зависит от свойств полезного сигнала x_t (мощности, времени корреляции и т. д.) и интенсивности N шума ξ_t. (Решающие пороговые устройства при временной функции потерь этим свойством инвариантности не обладают.)

10.2.3. Небайесовская задача. Выше задача последовательного обнаружения сигналов рассматривалась в байесовской постановке. Однако возможна и небайесовская (условно-экстремальная) постановка, когда не делается никаких вероятностных предположений относительно параметра θ, характеризующего ситуации наличия ($\theta=1$) и отсутствия ($\theta=0$) полезного сигнала в наблюдаемом процессе.

Как и при рассмотрении небайесовской задачи обнаружения с фиксированным временем наблюдения (критерий Неймана — Пирсона, см. п. 2.2.2), необходимо ввести вероятности ошибок 1-го и 2-го рода:

$$\alpha(\Delta)=P\{\delta_{\tau(\Delta)}=d_1\,|\,\theta=0\};\quad \beta(\Delta)=P\{\delta_{\tau(\Delta)}=d_0\,|\,\theta=1\};$$

здесь $\tau(\Delta)$ — момент окончания наблюдения, соответствующий последовательному решающему правилу Δ.

Пусть $\tilde{\Delta}(\alpha, \beta)$ — совокупность решающих правил Δ, таких, что вероятности ошибочных решений $\alpha(\Delta)$, $\beta(\Delta)$ не превышают заданных вероятностей α, $\beta\,(\alpha+\beta<1)$: $\alpha(\Delta)\leqslant\alpha$, $\beta(\Delta)\leqslant\beta$, $\Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha, \beta)$. Требуется среди всех $\Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha, \beta)$ найти такое правило Δ^*, чтобы условные информационные меры

$$\begin{aligned} I_0(\Delta)&=-M[z(\tau(\Delta))\,|\,\theta=0],\\ I_1(\Delta)&=M[z(\tau(\Delta))\,|\,\theta=1] \end{aligned} \qquad (10.2.20)$$

($z(\tau(\Delta))$ — ЛП) были минимальны:

$$I_0(\Delta^*)=\inf_{\Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha,\beta)} I_0(\Delta),\quad I_1(\Delta^*)=\inf_{\Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha,\beta)} I_1(\Delta).$$

Нахождение оптимального правила Δ^* при произвольных наблюдаемых данных — весьма сложная задача. Однако в целом ряде случаев ее решение облегчает использование неравенств [149]

$$I_0(\Delta)\geqslant f(\alpha, \beta),\ I_1(\Delta)\geqslant f(\beta, \alpha),\ \Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha, \beta), \qquad (10.2.21)$$

[функция $f(x, y)$ определяется формулой (8.2.51)], дающих оценку снизу для условных информационных мер при любых $\Delta\subset\tilde{\Delta}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим задачу обнаружения произвольного стохастического сигнала $x(t)$ в белом шуме, когда наблюдаемые данные имеют вид (7). На процесс $x(t)$ накладывается несущественное для практики ограниче-

ние: предполагается, что оценка $m(t)=\mathbf{M}[x(t)\,|\,y_0{}^t,\ \theta=1]$ такова, что для $m_j(t)=\{m(t),\ \theta=j\}$, $j=0,\ 1$, с вероятностью 1

$$\frac{1}{N}\int_0^T m_j{}^2(t)\,dt<\infty,\quad j=0,\ 1;\quad T<\infty;$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^T m_j{}^2(t)\,dt=+\infty,\quad j=0,\ 1. \tag{10.2.22}$$

Обозначим через $\Delta^0=\{\delta_t,\ t\geqslant 0\}$ двухпороговую последовательную процедуру вида (19), в которой пороги a и b связаны с заданными вероятностями ошибок α, β равенствами

$$a=\ln\frac{\beta}{1-\alpha};\qquad b=\ln\frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{10.2.23}$$

Используя оценочно-корреляционное представление ЛП

$$z(\tau(\Delta))=\frac{1}{N}\int_0^{\tau(\Delta)} m(t)\,d^*\overline{y}(t)-\frac{1}{2N}\int_0^{\tau(\Delta)} m^2(t)\,dt, \tag{10.2.24}$$

можно показать (см. [157] и [69, гл. 17, § 6], что при выполнении (22) имеют место равенства

$$\alpha(\Delta^0)=\alpha;\ \beta(\Delta^0)=\beta;$$

$$I_0(\Delta^0)=f(\alpha,\ \beta);\ I_1(\Delta^0)=f(\beta,\ \alpha), \tag{10.2.25}$$

причем

$$I_j(\Delta^0)=\frac{1}{2N}\mathbf{M}\left[\int_0^{\tau(\Delta^0)} m^2(t)\,dt\,|\,\theta=j\right]<\infty,\qquad j=0,1. \tag{10.2.26}$$

Из (21), (25) следует, что правило Δ^0, определяемое соотношениями (19), (23), является оптимальным при условно-экстремальной постановке задачи и информационной мере стоимости наблюдений: $\Delta^*=$ $=\Delta^0$.

Итак, последовательная процедура обнаружения произвольного стохастического сигнала в белом шуме, основанная на сравнении ЛП (или ОП) с двумя постоянными порогами, является оптимальной при информационной мере стоимости наблюдений как для байесовской (п. 10.2.2), так и для небайесовской постановок задачи. В разных постановках пороги выбираются по-разному (ср. (18) с (23)), а достаточная статистика обнаружения одна и та же (ЛП).

Замечание. Рассмотрим частный случай, когда стохастический сигнал $x(t)$ вырождается в константу: $x(t)\equiv S$ при $t\geqslant 0$. В этом случае $m(t)=S$, $t\geqslant 0$, и из (20), (24) получаем

$$I_0(\Delta)=\frac{S^2}{2N}\mathbf{M}[\tau(\Delta)\,|\,\theta=0],\qquad I_1(\Delta)=\frac{S^2}{2N}\mathbf{M}[\tau(\Delta)\,|\,\theta=1].$$

Отсюда и из вышеизложенного следует, что правило $\Delta^0=\Delta^*$ в рассматриваемом случае является оптимальным в смысле минимума среднего времени наблюдения:

$$\mathbf{M}[\tau(\Delta^0)\,|\,\theta=0]\leqslant\mathbf{M}[\tau(\Delta)\,|\,\theta=0];$$

$$\mathbf{M}[\tau(\Delta^0)\,|\,\theta=1]\leqslant\mathbf{M}[\tau(\Delta)\,|\,\theta=1]\ \text{для всех}\ \Delta\subset\widetilde{\Delta}(\alpha,\ \beta).$$

Таким образом, двухпороговая процедура Вальда (19), (23) оптимальна при небайесовской постановке и временной мере стоимости наблюдений в задаче обнаружения постоянного сигнала в белом шуме. Для более общих задач обнаружения эта процедура не является оптимальной (при временной мере стоимости наблюдений). Отметим, что аналогичное утверждение справедливо и для байесовской постановки (см. § 10.1).

10.3. АНАЛИЗ

Рассмотрим теперь задачу анализа последовательных обнаружителей, которая сводится к нахождению вероятностей ошибочных решений, статистических характеристик длительности процесса обнаружения, а также к вычислению соответствующих информационных мер.

10.3.1. Уравнения для апостериорных вероятностей ошибок и среднего времени обнаружения (общий случай). Пусть наблюдаемый процесс $\{y_t, t \geqslant 0\}$, представляющий собой либо помеху, либо комбинацию полезного сигнала и помехи, протекает в непрерывном времени, и пусть $z_t = \{z_{1t}, \ldots, z_{nt}\}$ — некоторая n-мерная статистика, на основании которой принимается решение по правилу

$$\delta_t(\mathbf{z}_t) = \begin{cases} d_0 & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{0t}, \\ d_1 & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{1t}, \\ d_\sim & \text{при } \mathbf{z}_t \in V_{\sim t}. \end{cases} \qquad (10.3.1)$$

Здесь V_{0t}, V_{1t} — области остановки наблюдения, границы которых обозначим через G_{0t} и G_{1t} соответственно; d_0, d_1, $d_\sim$ — решения, имеющие прежний смысл (см. п. 10.1.1).

Как выяснено ранее, оптимальный (при байесовском критерии) последовательный обнаружитель сигналов на фоне помех принимает решение на основании достаточных статистик, которые являются марковским процессом. Кроме того, немарковскую статистику (процесс) можно представить с необходимой степенью точности как компоненту некоторого многомерного марковского процесса. Поэтому особый интерес представляет случай, когда статистика $\mathbf{z}_t$ является марковской. Это предположение и будет принято в дальнейшем.

Отметим, что хотя статистика $\mathbf{z}_t$ марковская, правило (1) не обязательно должно быть оптимальным. Оно может быть как оптимальным, так и неоптимальным. Неоптимальность последовательной процедуры (1) может быть обусловлена, в частности, тем, что границы прекращения наблюдения (G_{1t}, G_{0t}) выбраны каким-либо неоптимальным способом.

Одна из важных задач анализа заданной последовательной процедуры (1) заключается в отыскании вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода

$$\alpha = P(\delta_\tau = d_1 \mid \theta = 0); \qquad \beta = P(\delta_\tau = d_0 \mid \theta = 1), \qquad (10.3.2)$$

где τ — момент прекращения наблюдения (время обнаружения), являющийся случайной величиной. Как и в случае фиксированного времени обнаружения, при нахождении обычных вероятностей ошибок оказыва-

ют помощь апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, которые здесь равны

$$\alpha(\mathbf{z},\ t)=P(\delta_\tau=d_1\,|\,\theta=0,\ \mathbf{z}_t=\mathbf{z});$$
$$\beta(\mathbf{z},\ t)=P(\delta_\tau=d_0\,|\,\theta=1,\ \mathbf{z}_t=\mathbf{z}). \qquad (10.3.3)$$

В силу марковости статистики $\mathbf{z}_t$ функции (3) удовлетворяют уравнениям с частными производными, аналогичным (8.2.21),

$$\frac{\partial\alpha(\mathbf{z},\ t)}{\partial t}+\mathscr{L}_0[\alpha(\mathbf{z},\ t)]=0; \qquad \frac{\partial\beta(\mathbf{z},\ t)}{\partial t}+\mathscr{L}_1[\beta(\mathbf{z},\ t)]=0; \qquad (10.3.4)$$

$$\mathscr{L}_\nu=\sum_{i=1}^{n}A_i^\nu(\mathbf{z},\ t)\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{n}B_{ij}^\nu(\mathbf{z},\ t)\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j},\quad \nu=0,\ 1, \qquad (10.3.5)$$

с граничными условиями (при неусеченной процедуре), которые вытекают из (1):

$$\alpha(\mathbf{z},\ t)\,|_{G_{0t}}=0;\ \ \alpha(\mathbf{z},\ t)\,|_{G_{1t}}=1;$$
$$\beta(\mathbf{z},\ t)\,|_{G_{0t}}=1;\ \ \beta(\mathbf{z},\ t)\,|_{G_{1t}}=0. \qquad (10.3.6)$$

Коэффициенты $A_i^\nu(\mathbf{z},\ t)$, $B_{ij}^\nu(\mathbf{z},\ t)$, входящие в (5), определяются формулами (8.2.22). Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода (2) связаны с апостериорными вероятностями ошибок (3) соотношениями, аналогичными (8.2.24).

Наряду с вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода представляют интерес статистические характеристики случайной величины τ, важнейшими из которых являются средние времена обнаружения при отсутствии и при наличии сигнала:

$$\bar{\tau}_\nu=M(\tau\,|\,\theta=\nu),\quad \nu=0,\ 1. \qquad (10.3.7)$$

Аналогично предыдущему при нахождении среднего времени (7) помогает апостериорное среднее время обнаружения

$$\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z},\ t)=M(\tau-t\,|\,\theta=\nu,\ \mathbf{z}_t=\mathbf{z}),\quad \nu=0,1. \qquad (10.3.8)$$

Учитывая марковский характер статистики z_t, можно показать, что при дискретном времени функции (8) в области продолжения наблюдений описываются рекуррентными соотношениями, аналогичными (10.1.20),

$$\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z},\ t_k)=M(\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z}_{t_{k+1}},\ t_{k+1})\,|\,\mathbf{z}_{t_k}=\mathbf{z})+(t_{k+1}-t_k),$$
$$k=N-1,\ N-2,\dots,\ 0;\ \nu=0,\ 1.$$

Устремляя интервал дискретизации по времени к нулю $(t_{k+1}-t_k)=\tilde{\Delta}\to 0$, получаем, что при непрерывном времени функции (8) описываются уравнениями

$$\frac{\partial\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z},\ t)}{\partial t}+\mathscr{L}_\nu[\bar{\tau}_\nu(z,\ t)]=-1,\quad \nu=0,\ 1, \qquad (10.3.9)$$

где операторы $\mathscr{L}_\nu$ имеют вид (5). Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями, вытекающими из (1), (8)

$$\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z},\ t)\big|_{G_{0t}}=\bar{\tau}_\nu(\mathbf{z},\ t)\big|_{G_{1t}}=0,\quad \nu=0,\ 1. \qquad (10.3.10)$$

Решив краевые задачи (4), (6) и (9), (10), подставив в найденные решения начальные значения используемых статистик и $t=0$, получим искомые вероятности ошибок (2) и средние времена (7).

К сожалению, решение многомерных краевых задач представляет значительные трудности. Однако можно дать (см. следующий пункт) приближенный метод вычисления вероятностей ошибок и среднего времени обнаружения в рамках одномерного приближения, существенно упрощающий анализ последовательного обнаружения.

10.3.2. Характеристики двухпорогового обнаружения. Рассмотрим неусеченную двухпороговую последовательную процедуру, при которой решающее правило имеет вид

$$\delta_t(z_t)=\begin{cases} d_0 & \text{при } z_t=a,\\ d_1 & \text{при } z_t=b,\\ d_\sim & \text{при } a<z_t<b,\end{cases} \qquad (10.3.11)$$

где z_t — скалярная статистика; a и b — некоторые константы (пороги). Статистика z_t может быть равной ЛП, но может и отличаться от него.

Процедура (11) близка к оптимальной (при временной функции потерь), если статистика z_t равна ЛП и если выполняются соответствующие условия (см. п. 10.1.4). При информационной функции потерь алгоритм типа (11) является оптимальным, если z_t — ЛП, а наблюдаемые данные имеют вид (10.2.7) или же могут быть сведены к (10.2.7), например методом порождающего процесса (подобно п. 7.1.3).

Анализ правила (11) представляет также интерес и для тех случаев, когда z_t отличается от ЛП (подобную статистику можно использовать для упрощения технической реализации обнаружителя).

Рассмотрим случай, когда статистика z_t, входящая в (11), допускает аппроксимацию одномерным марковским процессом с постоянными коэффициентами переноса M_0, M_1 и диффузии K_0, K_1 при $\theta=0$ и 1 соответственно. (Такая аппроксимация удовлетворительна, например, при выполнении условий (10.1.35).) В рассматриваемом приближении многомерные уравнения (4) для апостериорных вероятностей ошибок переходят в одномерные. Причем поскольку процесс $\{z_t\}$ однородный, значения порогов не зависят от времени, а последовательная процедура — неусеченная, то зависимость от t исчезает. В результате уравнения и граничные условия для апостериорных вероятностей ошибок приобретают вид

$$M_0\frac{\partial\alpha(z)}{\partial z}+\frac{1}{2}K_0\frac{\partial^2\alpha(z)}{\partial z^2}=0,\quad \alpha(a)=0,\ \alpha(b)=1;$$

$$M_1\frac{\partial\beta(z)}{\partial z}+\frac{1}{2}K_1\frac{\partial^2\beta(z)}{\partial z^2}=0,\quad \beta(a)=1;\ \beta(b)=0.$$

Решая их и подставляя начальное значение $z=0$, получим искомые вероятности ошибок (2)

$$\alpha=\frac{1-\exp\left(\dfrac{2M_0}{K_0}a\right)}{1-\exp\left[\dfrac{2M_0}{K_0}(a-b)\right]};\qquad \beta=\frac{1-\exp\left(\dfrac{2M_1}{K_1}b\right)}{1-\exp\left[\dfrac{2M_1}{K_1}(b-a)\right]}. \qquad (10.3.12)$$

Найденные соотношения определяют вероятности ошибок по заданным порогам. С другой стороны, формулы (12) позволяют при заданных α, β рассчитать пороги a и b.

Если статистика z_t равна ЛП, причем рассматривается задача обнаружения постоянного сигнала в белом шуме или же рассматривается асимптотическая задача (см. п. 8.2.5) обнаружения произвольного стохастического сигнала в белом шуме, то в этих случаях имеют место соотношения (см. (8.2.66))

$$M_1 = -M_0 = 0{,}5K_1 = 0{,}5K_0. \qquad (10.3.12')$$

Подставляя их в (12), получаем формулы Вальда

$$a = \ln\frac{\beta}{1-\alpha}; \qquad b = \ln\frac{1-\beta}{\alpha}. \qquad (10.3.13)$$

Отметим, что соотношения (13) справедливы и в общем случае, если только непрерывная последовательная процедура основана на сравнении ЛП с двумя постоянными порогами. Если же с постоянными порогами сравнивается статистика, отличная от ЛП, то формулы (13) несправедливы. В этом случае для расчета надо пользоваться соотношениями (12) (если справедлива указанная выше марковская аппроксимация).

Аналогичным образом в рассматриваемом приближении многомерные уравнения (9), (10) для апостериорных средних времен переходят в одномерные

$$M_\nu \frac{\partial \bar{\tau}(z)}{\partial z} + \frac{1}{2} K_\nu \frac{\partial^2 \bar{\tau}(z)}{\partial z^2} + 1 = 0,$$

$$\bar{\tau}_\nu(a) = \bar{\tau}_\nu(b) = 0; \qquad \nu = 0,\ 1.$$

Определив отсюда функции $\bar{\tau}_\nu(z)$ и подставив в них $z=0$, получим формулы для среднего времени обнаружения (7)

$$\bar{\tau}_\nu = \frac{b-a}{M_\nu} \frac{1-\exp\left(\dfrac{2M_\nu}{K_\nu} a\right)}{1-\exp\left[-\dfrac{2M_\nu}{K_\nu}(b-a)\right]} + \frac{a}{M_\nu}, \qquad \nu = 0,\ 1. \qquad (10.3.14)$$

Эти формулы с учетом (12) можно переписать в виде

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\alpha b + (1-\alpha) a}{M_0}, \qquad \bar{\tau}_1 = \frac{\beta a + (1-\beta) b}{M_1}.$$

Если с постоянными порогами сравнивается ЛП, то, воспользовавшись (13), найдем

$$\bar{\tau}_0 = -\frac{f(\alpha,\ \beta)}{M_0}, \quad \bar{\tau}_1 = \frac{f(\beta,\ \alpha)}{M_1}, \qquad (10.3.15)$$

где функция $f(x,\ y)$ совпадает с (8.2.51).

10.3.3. Эффективность (временная). Эффективность последовательного обнаружения по сравнению с обнаружением при фиксированном времени наблюдения T можно оценивать отношениями:

$$\mu_0 = \bar{\tau}_0/T, \qquad \mu_1 = \bar{\tau}_1/T. \qquad (10.3.16)$$

Рассматривая последовательный обнаружитель, основанный на сравнении ЛП с постоянными порогами, подставим в (16) соотношения

(15), а также выражение для T, вытекающее из характеристик обнаружения при фиксированном времени (8.2.38). В результате получим

$$\mu_0=\frac{(M_1-M_0)^2}{K_0M_0}\frac{f(\alpha,\ \beta)}{[\sqrt{K_1/K_0}\,F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)]^2},$$

$$\mu_1=\frac{(M_1-M_0)^2}{K_0M_1}\frac{f(\beta,\ \alpha)}{[\sqrt{K_1/K_0}\,F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)]^2}, \qquad (10.3.17)$$

где функция f определяется (8.2.51), а F^{-1} — функция, обратная (8.2.34).

При симметричных порогах, когда $\alpha=\beta$, из (17) следует, что

$$\mu_\nu=\frac{(M_1-M_0)^2}{|M_\nu|(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_0})^2}\frac{f(\alpha,\ \beta)}{[F^{-1}(\alpha)]^2},\quad \nu=0,1.$$

В асимптотическом случае при $\alpha\sim\beta\to\infty$ получаем

$$\mu_\nu\sim\frac{1}{2}\frac{(M_1-M_0)^2}{|M_\nu|(\sqrt{K_1}+\sqrt{K_0})^2},\quad \nu=0,1.$$

При несимметричных порогах из (17) находим асимптотические формулы для $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, $\alpha\ll\beta$:

$$\mu_0\sim-\frac{(M_1-M_0)^2}{K_0M_0}\frac{\ln\beta}{2\ln\alpha},\quad \mu_1\sim\frac{1}{2}\frac{(M_1-M_0)^2}{K_0M_1}.$$

Если $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, $\alpha\gg\beta$, то из (17) следует

$$\mu_0\sim-\frac{1}{2}\frac{(M_1-M_0)^2}{K_1M_0},\quad \mu_1\sim\frac{(M_1-M_0)^2}{K_1M_1}\frac{\ln\alpha}{2\ln\beta}.$$

При выводе этих формул учтено, что

$$F^{-1}(\alpha)\sim\sqrt{2\ln(1/a)},\quad \text{при } \alpha\to 0,$$

$$[F^{-1}(\alpha)]^2\gg(K_1/K_0)\,[F^{-1}(\beta)]^2,\quad \text{при } \alpha\ll\beta.$$

Если в последовательном обнаружителе с двумя постоянными порогами сравнивается статистика, отличная от ЛП, то для определения эффективности в (16) нужно поставить (14), причем пороги a и b следует вычислить согласно (12).

Из полученных формул вытекает, что эффективность последовательного обнаружения зависит не только от вероятностей ошибок α, β (как в ряде соотношений работ [1, 7, 11, 20], где рассматривался случай независимой, однородной во времени выборки), но и от коэффициентов переноса и диффузии, которые, в свою очередь, определяются параметрами конкретной задачи.

10.3.4. Пример. Формулы п. 10.3.2 и 10.3.3 позволяют непосредственно рассчитывать характеристики неусеченного последовательного обнаружения: вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, среднее время обнаружения, а также эффективность последовательного обнаружения по сравнению с «классическим». Для расчета необходимо вначале вычислить согласно (8.2.31) коэффициенты переноса M_θ и диффузии K_θ марковских процессов, аппроксимирующих используемую статистику обнаружения при обеих гипотезах ($\theta=0$, $\theta=1$).

В случае приема марковского гауссовского сигнала в белом шуме указанные коэффициенты процессов, аппроксимирующих ЛП, приведены в п. 8.3.2. Воспользуемся ими для иллюстрации некоторых из полученных выше формул.

Подставив выражения для M_0 (8.3.3) и M_1 из (8.3.5) в (15), получим

$$\bar{\tau}_0 = \frac{2N(1+r)}{\sigma^2 r(1-r)} f(\alpha, \beta),$$
$$\bar{\tau}_1 = \frac{2N}{\sigma^2 r} f(\beta, \alpha), \qquad (10.3.18)$$

где r — относительная точность фильтрации (8.3.4), зависящая от отношения сигнал/шум $\sigma^2/N\gamma$. Соотношения (18) выявляют взаимосвязь характеристик последовательного обнаружения $(\bar{\tau}_\nu, \alpha, \beta)$ с характеристикой оценивания (r).

При $r \ll 1$ (малая точность фильтрации) из (18) следует

$$\sigma^2\bar{\tau}_0/2N \approx (1/r) f(\alpha, \beta), \quad \sigma^2\bar{\tau}_1/2N \approx (1/r) f(\beta, \alpha), \quad r \ll 1.$$

Эти формулы, в частности, показывают, что в случае последовательного обнаружения слабого сигнала ($\sigma^2/N\gamma \ll 1$, $r \ll 1$) увеличение точности фильтрации при фиксированных α, β приводит к уменьшению значения параметра $\sigma^2\bar{\tau}_\nu/N$, характеризующего отношение средней энергии сигнала к интенсивности шума.

Расчет эффективности последовательного обнаружения проводится на основании соотношений п. 10.3.3, в которые нужно подставить (8.3.3), (8.3.5). Из получаемых формул следует, что эффективность зависит не только от α, β, но и от отношения сигнал/шум.

В случае слабого сигнала ($r \ll 1$) коэффициенты (8.3.3), (8.3.5) упрощаются:

$$M_1 \approx -M_0 \approx 0{,}5K_1 \approx 0{,}5K_0 \approx (\sigma^2/2N) r. \qquad (10.3.19)$$

Подставляя их в (17), получаем

$$\mu_0 \approx 2f(\alpha, \beta)/[F^{-1}(\beta) + F^{-1}(\alpha)]^2,$$
$$\mu_1 \approx 2f(\beta, \alpha)/[F^{-1}(\beta) + F^{-1}(\alpha)]^2. \qquad (10.3.20)$$

Заметим, что эти предельные соотношения совпадают с найденными в [1] асимптотическими эффективностями для случая близких гипотез и независимых, однородных во времени наблюдаемых данных. Отметим еще, что в случае обнаружения постоянного сигнала (любого уровня) в белом шуме приближенные равенства (19) переходят в точные (12′), при этом приближенные соотношения (20) также становятся точными. Из (20), в частности, следует, что при $\alpha \sim \beta \to 0$

$$\mu_0 \sim \mu_1 \to \frac{1}{4},$$

т. е. при малых вероятностях ошибок последовательное обнаружение эффективнее классического (в рассматриваемых случаях) примерно в 4 раза.

10.3.5. Эффективность (информационная). Качество работы оптимальных последовательных обнаружителей, синтезированных с учетом информационной меры стоимости наблюдений, определяется минимальным значением среднего информационного риска (10.2.2) (при байесовской постановке) или величиной условных информационных мер (10.2.26) (при небайесовской постановке). Интересны и другие характеристики подобных обнаружителей: вероятности ошибочных решений и среднее время наблюдения.

При информационной мере стоимости наблюдений эффективность последовательного решающего правила Δ по сравнению с правилом Неймана — Пирсона целесообразно оценивать отношениями

$$\mu_{I_0}(\Delta) = I_0(\Delta)/I_0(\Delta_T), \quad \mu_{I_1}(\Delta) = I_1(\Delta)/I_1(\Delta_T); \quad \Delta, \Delta_T \subset \tilde{\Delta}(\alpha, \beta), \qquad (10.3.21)$$

где меры $I_j(\Delta)$, $j=0, 1$ определяются согласно (10.2.20):

$$I_j(\Delta_T)=(-1)^{j+1}M[z_T \mid \theta=j], \quad j=0,\ 1$$

— условные информационные меры, соответствующие правилу Неймана — Пирсона с фиксированным временем наблюдения $T(z_T$ — ЛП), а множество решающих правил $\tilde{\Delta}(\alpha, \beta)$ определено в п. 10.2.3.

Для двухпороговой последовательной процедуры Вальда, как следует из результатов п. 10.2.3, при обнаружении произвольного стохастического сигнала в белом шуме и выполнении условий (10.2.22) имеем

$$\mu_{I_0}(\Delta^0)\leqslant 1, \quad \mu_{I_1}(\Delta^0)\leqslant 1.$$

В том частном случае, когда в белом шуме обнаруживается детерминированный сигнал $S(t)$, условия (10.2.22) принимают вид

$$\frac{1}{N}\int_0^T S^2(t)\,dt<\infty, \quad T<\infty;$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^T S^2(t)\,dt=+\infty;$$

а „информационные эффективности" $\mu_{I_0}(\Delta^0)$, $\mu_{I_1}(\Delta^0)$, как следует из (21), (10.2.25) и п. 8.3.1, равны

$$\mu_{I_0}(\Delta^0)=\frac{2f(\alpha,\ \beta)}{[F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)]^2}, \quad \mu_{I_1}(\Delta^0)=\frac{2f(\beta,\ \alpha)}{[F^{-1}(\beta)+F^{-1}(\alpha)]^2}. \qquad (10.3.22)$$

Получить точные формулы для информационных эффективностей в задаче обнаружения стохастического сигнала не удается. Однако в асимптотическом случае $\lambda\to\lambda^*$, когда для вероятностей ошибок α, β справедливо соотношение (8.2.70), опять приходим к формулам (22), в которых однако знак равенства надо заменить на знак $\backsim$.

Сравнивая полученные результаты с результатами предыдущего пункта, видим, в частности, что при обнаружении переменного детерминированного сигнала информационная эффективность совпадает, а при обнаружении стохастического сигнала асимптотически ($\lambda\to\lambda^*$) совпадает с эффективностью последовательного обнаружения постоянного сигнала в белом шуме при временной мере стоимости наблюдений.

Глава 11

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

Настоящая глава посвящена вопросам интерполяции и экстраполяции стохастических сигналов при наличии помех. Рассматриваемые здесь задачи являются задачами оценивания, при которых оценка полезного сигнала формируется не в конечной точке отрезка наблюдения, как в предыдущих задачах фильтрации, а внутри или вне его. Отметим,

что вместо термина интерполяция в литературе используются также такие термины, как фильтрация с запаздыванием или сглаживание, а вместо термина экстраполяция — фильтрация с упреждением, прогнозирование или предсказывание.

Интерполяция и экстраполяция случайных процессов изучалась во многих работах [51, 168, 121, 69, 75, 132] и др. Изложение материала данной главы следует, в основном, работам [96, 102, 55].

11.1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

11.1.1. Синтез. Пусть полезный сигнал $S(x_\tau, \tau)$ представляет собой известную функцию случайного процесса $\{x_\tau\}$, протекающего в дискретном или в непрерывном времени. Сигнал искажается случайной помехой, при этом наблюдается процесс $\{y_\tau\}$. Предположим, что наблюдение ведется в течение отрезка времени $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Если находится оценка сигнала или его параметра x_τ в точке τ при наблюдении $\{y_\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$, то, очевидно, эта оценка $d_{t\tau}$ будет зависеть от моментов времени τ, t и от реализации $y_0{}^t$:$d_{t\tau} = \delta_\tau(y_0{}^t)$. Оптимальная решающая функция $\delta_\tau^*(\cdot)$, дающая наилучшую оценку $d^*_{t\tau}$, отыскивается теми же методами, что и оценка типа $d_t^* = \delta^*(y_0{}^t)$ (см. § 2.3).

Задав функцию потерь $c(x_\tau, d_{t\tau})$, можно определить оптимальную в байесовском смысле оценку $d^*_{t\tau} = \delta^*_\tau(y_0{}^t)$, минимизируя апостериорный риск:

$$\inf_{\delta_\tau} M[c(x_\tau, \delta_\tau(y_0{}^t)) \mid y_0{}^t] = M[c(x_\tau, \delta_\tau^*(y_0{}^t)) \mid y_0{}^t]. \qquad (11.1.1)$$

Получаемые отсюда оценки $d_{t\tau}^*$ при $\tau = t$ совпадают с фильтрационными оценками $d^*_{tt} = d^*_t$, которые изучались нами раньше. В этом случае ($\tau = t$) имеем фильтрацию без упреждения и запаздывания (или просто фильтрацию). При $\tau < t$ имеем дело с интерполяцией, а при $\tau > t$ — с экстраполяцией.

Оценки $d_{t\tau}^*$ при $\tau < t$ и $\tau > t$ являются оптимальными интерполяционными и экстраполяционными оценками соответственно. При квадратичной функции потерь $c(x_\tau, d_{t\tau}) = (x_\tau - d_{t\tau})^2$ эти оценки параметра сигнала определяются выражением

$$d^*_{t\tau} = M[x_\tau \mid y_0{}^t], \quad \tau \gtrless t. \qquad (11.1.2)$$

(В этом нетрудно убедиться, поступая так же, как и при выводе (2.3.4).) Если полезный сигнал $S(x_\tau, \tau)$, а $c(x_\tau, d_{t\tau}) = [S(x_\tau, \tau) - d_{t\tau}]^2$, то оптимальные оценки сигнала имеют вид

$$d_{t\tau}^* = M[S(x_\tau, \tau) \mid y_0{}^t], \quad \tau \gtrless t. \qquad (11.1.3)$$

Для раскрытия алгоритмов оценок $d^*_{t\tau}$, получаемых согласно (1) — (3), потребуются апостериорные распределения параметра сигнала $p(x_\tau \mid y_0{}^t)$ при $\tau < t$ и $\tau > t$. Выводом уравнений, определяющих эволюцию этих распределений во времени, мы займемся в дальнейшем. При

этом нужно отметить, что поскольку рассматриваются два момента времени (τ и t), играющих различную роль в задаче оценивания, то имеется возможность построения уравнений разного вида (как для распределений, так и для самих оценок). Поясним сказанное применительно к интерполяции.

Если зафиксировать момент окончания наблюдения t, то эволюция оценки $d_{t\tau}^*$ рассматривается с изменением $\tau (\tau < t)$ — обратная интерполяция. Если же зафиксировать момент τ, когда осуществляется оценка, то уравнение для $d_{t\tau}^*$ строится по t — прямая интерполяция. Можно также зафиксировать разность $(t-\tau) = T$ и рассматривать уравнение по t — интерполяция с постоянным запаздыванием. В [75], где исследуются линейные оценки, указанные виды интерполяции соответственно именуются: сглаживание на закрепленном интервале, в закрепленной точке и сглаживание с постоянным запаздыванием. Там же приведены технические примеры применения этих видов интерполяции.

Подобную же классификацию можно провести и для задач экстраполяции.

11.1.2. Анализ. Качество работы интерполяционных и экстраполяционных систем, формирующих оценки $d_{t\tau} = \delta_\tau (y_0^t) (\tau \gtrless t)$, характеризуется средним риском: $R_{t\tau} = M [c (x_\tau, \delta_\tau (y_0^t))]$. Анализ оптимальных систем сводится к вычислению байесовского риска: $R^*_{t\tau} = M [c (x_\tau, \delta_\tau^* (y_0^t))]$. При квадратичной функции потерь, когда оценки определяются согласно (2), байесовский риск

$$R_{t\tau}^* = M [x_\tau - M (x_\tau \mid y_0^t)]^2 \tag{11.1.4}$$

совпадает со средним квадратом ошибки интерполяции $(\tau < t)$ или экстраполяции $(\tau > t)$.

Если существует интерполяционная оценка $d_{t\tau}^*$ случайного параметра x_τ, то, очевидно, существует и его фильтрационная оценка $d_{\tau\tau}^* = d_\tau^*$. Соответствующие байесовские риски удовлетворяют неравенству

$$R_{t\tau}^* \leqslant R_\tau^*, \quad \tau < t.$$

Это объясняется тем, что дополнительное наблюдение (над $\{y_s, \tau < s \leqslant t\}$) не может ухудшить качество оптимального оценивания, оно может быть либо улучшено, либо, по крайней мере, остаться прежним. Последнее, как ясно, например, из (4), справедливо в том случае, если

$$M [x_\tau \mid y_0^t] = M [x_\tau \mid y_0^\tau],$$

т. е. когда параметр x_τ статистически не зависит от дополнительного наблюдения y_s^t, $s > \tau$ (к этому вопросу мы еще вернемся при рассмотрении конкретного примера в п. 11.3.2). А теперь перейдем к выводу алгоритмов интерполяции и экстраполяции, при этом для получения конструктивных результатов потребуется конкретизировать вид исследуемых процессов. В дальнейшем в качестве моделей сигналов и помех используются марковские процессы.

11.2.1. Общие рекуррентные алгоритмы. Предположим, что наблюдаемый процесс представляет собой аддитивную смесь сигнала $S(x_k, t_k)$ и помехи η_k:

$$y(t_k) \equiv y_k = S(x_k, t_k) + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\{x_k\}$, $\{\eta_k\}$ — марковские процессы с дискретным временем, определяемые переходными плотностями $\pi(x_{k+1}|x_k)$, $\rho(\eta_{k+1}|\eta_k)$ и начальными плотностями вероятностей $\pi(x_1)$, $\rho(\eta_1)$ соответственно. Как ясно из предыдущего, в задачах экстраполяции и интерполяции сигналов и их параметров фундаментальную роль играет АПВ

$$w_{nk}(x_k) = p(x_k | y_1^n) \tag{11.2.1}$$

при $k \gtrless n$. Она определяет оптимальную обработку и позволяет оценить качество этой обработки.

Экстраполяция. АПВ (1) при $k > n$ будем искать последовательным образом, при этом вначале потребуется найти АПВ при $k = n$, т. е. потребуется, по сути дела, решить задачу фильтрации. Рекуррентное соотношение фильтрации, определяющее АПВ $w_k(x_k) = p(x_k | y_1^k)$, получено ранее:

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1}) | y_k - S(x_k)]\, \pi(x_{k+1} | x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k}{\int\int \rho[y_{k+1} - S(x_{k+1}) | y_k - S(x_k)]\, \pi(x_{k+1} | x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k dx_{k+1}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11.2.2}$$

Начальное условие для (2) имеет вид

$$w_1(x_1) = \frac{\rho[y_1 - S(x_1)]\, \pi(x_1)}{\int \rho[y_1 - S(x_1)]\, \pi(x_1)\, dx_1}. \tag{11.2.3}$$

Поскольку процесс $\{x_k\}$ — простой марковский, то при $k \geqslant n$ имеем

$$\pi(x_{k+1} | x_k)\, p(x_k | y_1^n) = p(x_{k+1}, x_k | y_1^n).$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение для (1):

$$w_{n, k+1}(x_{k+1}) = \int \pi(x_{k+1} | x_k)\, w_{nk}(x_k)\, dx_k, \quad k = n, n+1, \ldots, \tag{11.2.4}$$

при этом начальное условие

$$w_{nn}(x_n) = w_n(x_n) \tag{11.2.5}$$

находится из (2), (3).

Таким образом, при помощи (3), (2), (4) последовательным путем определяется АПВ $w_{nk}(x_k)$, используя которую в соответствии с (11.1.1) или (11.1.2), (11.1.3), можно найти при заданной функции потерь оптимальную экстраполяционную оценку d^*_{nk} сигнала или его параметра при $k > n$. Отметим, что до момента времени t_n наблюдалась смесь сигнала и шума; при $t_k > t_n$ наблюдение не проводилось.

Интерполяция (обратная). Для решения задачи интерполяции необходимо найти АПВ (1) при $k < n$. Введем условную плотность вероятностей

$$p(x_k | x_{k+1}, y_1^k) = \frac{p(x_{k+1}, x_k | y_1^k)}{\int p(x_{k+1}, x_k | y_1^k)\, dx_k}.$$

Это соотношение, очевидно, можно записать в виде

$$p(x_k \mid x_{k+1},\ y_1^k) = \frac{\pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)}{\int \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k}. \tag{11.2.6}$$

Вследствие марковости процесса $\{x_k\}$

$$p(x_k \mid x_{k+1},\ y_1^k) = p(x_k \mid x_{k+1},\ y_1^n), \quad k < n. \tag{11.2.7}$$

Подставляя (6) с учетом (7) в равенство

$$p(x_{k+1} \mid y_1^n)\, p(x_k \mid x_{k+1},\ y_1^n) = p(x_{k+1},\ x_k \mid y_1^n)$$

и интегрируя затем по x_{k+1}, получим

$$\int w_{n,\,k+1}(x_{k+1}) \frac{\pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w_k(x_k)}{\int \pi(x_{k+1} \mid x_k)\, w(x_k)\, dx_k} dx_k = w_{nk}(x_k),$$

$$k = n-1,\ n-2, \ldots,\ 1. \tag{11.2.8}$$

Это рекуррентное соотношение соответствует возвратному времени (обратная интерполяция), причем начальное условие будет то же самое, что и при экстраполяции, т. е. (5). При помощи апостериорных распределений $w_{nk}(x_k)$ ($k=n-1, \ldots, 1$), получаемых из (3), (2), (8), и соотношений п. 11.1.1 находится оптимальная интерполяционная оценка полезного сигнала (или его параметра), наблюдаемого на фоне марковских помех.

Как и в предыдущем случае, вначале должна быть решена задача фильтрации в соответствии с рекуррентным соотношением (2). Но если при экстраполяции требовалось знание лишь конечной плотности $w_n(x_n)$, то для нахождения интерполяционной оценки в момент времени t_l согласно (8) необходим набор АПВ $w_k(x_k)$, $k=n, n-1, \ldots, l$. Поэтому устройство обратной интерполяции сигнала, помимо блока фильтрации, должно включать в себя блок, запоминающий функции $w_k(x_k)$ (или заменяющие их статистики) и подающий соответствующие значения в последовательные моменты времени на схему с замкнутой обратной связью, структура которой определяется рекуррентным соотношением (8).

Обобщение. Если помеха неаддитивная, то изменению подвергается лишь рекуррентное соотношение фильтрации (2), при этом оно имеет вид (5.1.3). Соотношения (4) и (8), как нетрудно убедиться, остаются неизменными.

Если полезный сигнал — функция $S(\mathbf{x}_k,\ t_k)$ векторного марковского процесса $\{\mathbf{x}_k\}$, то соотношения (2), (4), (8) сохраняют прежний вид с заменой x на $\mathbf{x}$.

Дискретный параметр. В том случае, когда параметр полезного сигнала является дискретным и представляет собой однородную цепь Маркова с конечным числом (l) состояний, рекуррентное соотношение

фильтрации берется из (5.1.12), а вместо (4), (8) и (5) имеем соответственно

$$w_{n,\,k+1}(x^\alpha)=\sum_{\beta=1}^{l}\pi_{\beta\alpha}w_{nk}(x^\beta),\quad \alpha=1,\,2,\ldots,\,l;\ k=n,\ n+1,\ldots;$$

$$\sum_{\alpha=1}^{l}w_{n,\,k+1}(x^\alpha)\,\frac{\pi_{\beta\alpha}w_k(x^\beta)}{\sum_{\beta=1}^{l}\pi_{\beta\alpha}w_k(x^\beta)}=w_{nk}(x^\beta),$$

$$\beta=1,\,2,\ldots,\,l;\quad k=n-1,\ n-2,\ldots,\,1;$$

$$w_{nn}(x^\alpha)=w_n(x^\alpha),\quad \alpha=1,\,2,\ldots,\,l. \tag{11.2.9}$$

Апостериорные вероятности $w_{nk}(x^\alpha)=p(x_k=x^\alpha\,|\,y_1^n)$, $\alpha=1,\ldots,l$, отыскиваемые при помощи рекуррентных соотношений (5.1.12), определяют оптимальные экстраполяционные и интерполяционные оценки в случае дискретного параметра сигнала (при наличии помех с непрерывным фазовым пространством).

Многофункциональные алгоритмы. Соотношения (2), (4), (8) определяют многофункциональный алгоритм фильтрации, экстраполяции и интерполяции при $\theta=1$ (сигнал в наблюдаемых данных присутствует). Предположим теперь, что возможен также случай отсутствия сигнала в наблюдаемом процессе ($\theta=0$). Дополним (2), (4), (8) выражением для ОП (6.4). В результате будем иметь четыре взаимосвязанных рекуррентных соотношения. Они определяют (вместе с решающим пороговым устройством) многофункциональный алгоритм обнаружения-фильтрации-интерполяции-экстраполяции сигналов при наличии помех.

Интерполяция (прямая и с постоянным запаздыванием). Выше рассматривалась обратная интерполяция. Перейдем теперь к другим видам интерполяции.

Вначале отметим, что параметр сигнала x_k и наблюдаемый процесс y_k совместно образуют двумерный марковский процесс $\{x_k,\ y_k\}$, переходную плотность которого обозначим через $\pi(y_{k+1},\ x_{k+1}|y_k,\ x_k)$. В том случае, когда параметр x_k сигнала $S(x_k,\ t_k)$ и аддитивная помеха η_k статистически независимы и определяются переходными плотностями $\pi(x_{k+1}|x_k)$, $\rho(\eta_{k+1}|\eta_k)$ соответственно, имеем

$$\pi(y_{k+1},\ x_{k+1}\,|\,y_k,\ x_k)=\rho\,[y_{k+1}-S(x_{k+1})\,|\,y_k-S(x_k)]\,\pi(x_{k+1}\,|\,x_k).$$

Для прямой интерполяции можно использовать совместную АПВ

$$w_{nk}(x_k,\ x_n)=p(x_k,\ x_n\,|\,y_1^n),\quad k<n, \tag{11.2.10}$$

которая находится из рекуррентного соотношения

$$w_{n+1,\,k}(x_k,\ x_{n+1})= \tag{11.2.11}$$

$$=\frac{\int\pi(y_{n+1},\ x_{n+1}\,|\,y_n,\ x_n)\,w_{nk}(x_k,\ x_n)\,dx_n}{\iiint\pi(y_{n+1},\ x_{n+1}\,|\,y_n,\ x_n)\,w_{nk}(x_k,\ x_n)\,dx_k dx_n dx_{n+1}},\qquad n=k+1,\ k+2,\ldots.$$

При этом начальное условие определяется формулой

$$w_{k+1,\,k}(x_k,\ x_{k+1})=\frac{\pi(y_{k+1},\ x_{k+1}\,|\,y_k,\ x_k)\,w_k(x_k)}{\iint\pi(y_{k+1},\ x_{k+1}\,|\,y_k,\ x_k)\,w_k(x_k)\,dx_k dx_{k+1}}.$$

Соотношение (11) описывает эволюцию АПВ (10) при увеличении отрезка наблюдения $[t_1, t_n]$ и фиксации момента t_k выдачи интерполяционной оценки, т. е. (11) дает алгоритм прямой интерполяции. Кроме того, соотношение (11) определяет и алгоритм фильтрации, так как позволяет найти АПВ

$$w_n(x_n) = \int w_{nk}(x_k,\ x_n)\, dx_k. \tag{11.2.12}$$

Если проинтегрировать обе части равенства (11) по x_{n+1}, учитывая при этом

$$w_{nk}(x_k,\ x_n) = w_{nk}(x_k)\, p(x_n \mid y_1^n,\ x_k)$$

и (12), то получим

$$w_{n+1,\,k}(x_k) = w_{nk}(x_k) \frac{\iint \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, p(x_n \mid y_1^n,\ x_k)\, dx_n dx_{n+1}}{\iint \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, w_n(x_n)\, dx_n dx_{n+1}}. \tag{11.2.13}$$

Это рекуррентное соотношение определяет эволюцию АПВ (1) при прямой интерполяции. Входящая в (13) АПВ $w_n(x_n)$ находится из рекуррентного соотношения фильтрации, которое в рассматриваемом здесь общем случае имеет вид

$$w_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{\int \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, w_n(x_n)\, dx_n}{\iint \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, w_n(x_n)\, dx_n dx_{n+1}}. \tag{11.2.14}$$

Плотность $p(x_n \mid y_1^n,\ x_k)$ (см. (13)) определяется аналогичной формулой; отличие лишь в начальном условии: рассматриваемая плотность в t_k-й момент обращается в дельта-функцию.

Обратимся к интерполяции с постоянным запаздыванием. Для этого рассмотрим двумерную АПВ $p(x_k,\ x_{k+1} \mid y_1^{n+1})$, которую представим в виде

$$p(x_k,\ x_{k+1} \mid y_1^{n+1}) = p(x_{k+1} \mid y_1^{n+1})\, p(x_k \mid y_1^{n+1},\ x_{k+1}).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по x_{k+1}:

$$\int p(x_{k+1} \mid y_1^{n+1})\, p(x_k \mid y_1^{n+1},\ x_{k+1})\, dx_{k+1} = p(x_k \mid y_1^{n+1}).$$

Далее, используя соотношения типа (6), (7) (обобщив их с учетом замены $\pi(x_{k+1} \mid x_k)$ на $\pi(y_{k+1},\ x_{k+1} \mid y_k,\ x_k)$) и принимая во внимание то, что АПВ $p(x_k \mid y_1^{n+1}) = w_{n+1,\,k}(x_k)$ определяется формулой (13), получим

$$\int w_{n+1,\,k+1}(x_{k+1}) \frac{\pi(y_{k+1},\ x_{k+1} \mid y_k,\ x_k)\, w_k(x_k)}{\int \pi(y_{k+1},\ x_{k+1} \mid y_k,\ x_k)\, w_k(x_k)\, dx_k}\, dx_{k+1} =$$

$$= w_{nk}(x_k) \frac{\iint \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, p(x_n \mid y_1^n,\ x_k)\, dx_n dx_{n+1}}{\iint \pi(y_{n+1},\ x_{n+1} \mid y_n,\ x_n)\, w_n(x_n)\, dx_n dx_{n+1}}. \tag{11.2.15}$$

Это рекуррентное соотношение, описывающее эволюцию АПВ $w_{nk}(x_k)$ с возрастанием времени наблюдения при $n-k=\text{const}$, и определяет интерполяцию с постоянным запаздыванием. Для интерполяции с за-

паздыванием на m шагов ($n-k=m=\text{const}$) необходимо сформировать начальное условие $w_{m+1,1}(x_1)$, используя алгоритм прямой интерполяции. Таким образом, на отрезке времени $[t_1, t_{m+1}]$ работает прямой интерполятор, затем вступает в работу интерполятор с постоянным запаздыванием.

Отметим, что алгоритм интерполяции с постоянным запаздыванием (15) является более сложным, чем алгоритмы прямой и обратной интерполяции.

11.2.2. Пример. Если параметр x является дискретным, то соответствующие рекуррентные алгоритмы можно моделировать непосредственно. При этом моделирование, например (5.1.12), (9) дает оптимальный приемник обнаружения-фильтрации-интерполяции-экстраполяции дискретных сигналов на фоне непрерывных помех. Если же параметр сигнала является непрерывным, то при моделировании нужно переходить к достаточным статистикам и в ряде задач применять квазиоптимальные методы.

Рассмотрим пример точного (оптимального) решения задач при непрерывном параметре, приводящий к сравнительно несложной схеме обработки. Пусть $y_k=x_k+\xi_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$) и пусть сигнал x_k представляет собой экспоненциально-коррелированный гауссовский процесс, а шум ξ_k — некоррелированный гауссовский процесс, определяемые соотношениями (4.3.2)—(4.3.4).

В данном примере АПВ $w_{nk}(x_k)$ является гауссовской как при $k>n$, так и при $k<n$:

$$w_{nk}(x_k)=\sqrt{\frac{h_{nk}}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{h_{nk}}{2}(x_k-m_{nk})^2\right\}. \qquad (11.2.16)$$

АПВ $w_k(x_k)$ также является гауссовской (4.3.5). При этом рекуррентные соотношения для ее параметров уже найдены (см. (4.3.6), (4.3.7)). Используя (4.3.2), (4), (16), найдем рекуррентные алгоритмы для параметров m_{nk} и h_{nk} в задаче экстраполяции:

$$m_{n,k+1}=m_{nk}R;\ h_{n,k+1}=\frac{h_{nk}}{h_{nk}\sigma^2(1-R^2)+R^2},\quad k=n,\ n+1,\ldots \qquad (11.2.17)$$

Начальные значения

$$m_{nn}=m_n,\qquad h_{nn}=h_n \qquad (11.2.18)$$

определяются при помощи рекуррентных соотношений фильтрации (4.3.6), (4.3.7). Из (17) следуют экстраполяционные формулы, в которые начальные значения (18) входят непосредственно:

$$m_{n,k+1}=m_nR^{k-n+1}=m_n\exp[-(k-n+1)\gamma|\tau|], \qquad (11.2.19)$$

$$h_{n,k+1}=\frac{h_n}{h_n\sigma^2[1-R^{2(k-n+1)}]+R^{2(k-n+1)}}=$$

$$=\frac{h_n}{h_n\sigma^2\{1-\exp[-2\gamma(k-n+1)|\tau|]\}+\exp[-2\gamma(k-n+1)|\tau|]},\quad k=n,\ n+1,\ldots \qquad (11.2.20)$$

Согласно (11.1.2), (16) величина $m_{n,k+1}$ ($k=n, n+1, \ldots$) представляет собой оптимальную экстраполяционную оценку полезного сигнала ($d^*_{n,k+1}=m_{n,k+1}$), обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки. Величина среднего квадрата ошибки, характеризующая качество экстраполяции, равна $1/h_{n,k+1}$, где $h_{n,k+1}$ вычисляется по формуле (20).

Перейдем к интерполяционной задаче. Подставим (4.3.2), выражения для $w_{n,\ k+1}(x_{k+1})$, $w_{nk}(x_k)$, $w_k(x_k)$ в форме (16), (4.3.5) в соотношение (8) и проинтегрируем; в результате получим рекуррентный алгоритм обратной интерполяции:

$$m_{nk} = \frac{m_{n,\ k+1} R + m_k h_k \sigma^2 (1-R^2)}{h_k \sigma^2 (1-R^2) + R^2},$$

$$h_{nk} = \frac{h_{n,\ k+1} [h_k \sigma^2 (1-R^2) + R^2]^2}{h_{n,\ k+1} \sigma^4 (1-R^2)^2 h_k + h_{n,\ k+1} \sigma^2 (1-R^2) R^2 + R^2}, \tag{11.2.21}$$

$$k = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1.$$

Начальные значения m_{nn}, h_{nn}, совпадающие с (18), а также величины m_k, h_k ($k = n-1, \ldots, 1$) определяются из (4.3.6), (4.3.7). Используя совместно рекуррентные

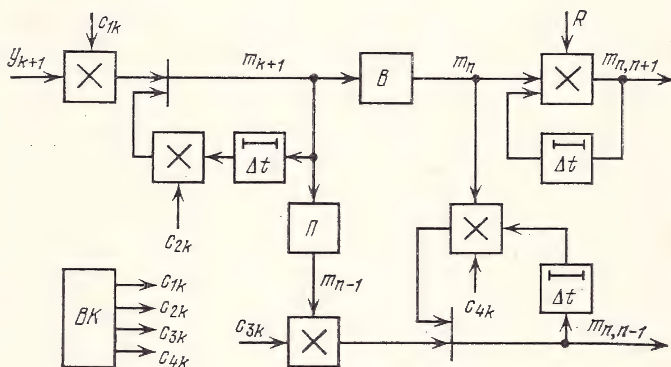


Рис. 11.1

соотношения фильтрации (4.3.6), (4.3.7) и интерполяции (21), можно последовательным образом найти оптимальную интерполяционную оценку $d^*_{nk} = m_{nk}$ ($k = n-1, \ldots, 1$) и соответствующий ей средний квадрат ошибки.

На рис. 11.1 в соответствии с (4.3.6), (17), (21) представлена структурная схема устройства, осуществляющего фильтрацию, обратную интерполяцию и экстраполяцию экспоненциально-коррелированного гауссовского сигнала в некоррелированном гауссовском шуме. Блок включения B открывается после окончания фильтрации (t_n), подавая оценку m_n на интерполятор и экстраполятор. Кроме того, на интерполятор с блока памяти П в моменты времени t_{n+1}, t_{n+2}, ..., поступают оценки m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1. Блок весовых коэффициентов ВК формирует константы c_{1k}, c_{2k} (4.3.10) и

$$c_{3k} = \frac{h_k \sigma^2 (1-R^2)}{h_k \sigma^2 (1-R^2) + R^2}, \qquad c_{4k} = \frac{R}{h_k \sigma^2 (1-R^2) + R^2},$$

и подает их последовательно на соответствующие умножители.

Если выход блока фильтрации (точка m_{k+1} на рис. 11.1) подсоединить к блоку формирования ЛП и пороговому устройству (как показано на рис. 4.2), то полученная в результате такого добавления система будет осуществлять оптимальное обнаружение-фильтрацию-интерполяцию-экстраполяцию рассмотренного сигнала в шуме.

11.3.1. Общие уравнения. Рассмотрим теперь случай, когда наблюдаемый процесс $\{y_t\}$ протекает в непрерывном времени, причем пусть

$$y_\tau = S(x_\tau, \tau) + \xi_\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{11.3.1}$$

где $\{x_\tau\}$ — диффузионный марковский процесс с коэффициентами переноса $a(x, \tau)$ и диффузии $b(x, \tau)$; ξ_τ — белый гауссовский шум интенсивности N.

Уравнения для АПВ $w_{t\tau} = p(x_\tau | y_0^t)$ при $\tau \gtrless t$ выведем путем предельного перехода в рекуррентных соотношениях экстраполяции и интерполяции. Для этого вначале воспользуемся представлением переходной плотности, входящей в указанные соотношения, в виде

$$\pi(x_{k+1} | x_k) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\{-iu(x_{k+1} - x_k)\} \theta(u, x_k)\, du,$$

где характеристическая функция $\Theta(u, x_k)$ определяется рядом

$$\theta(u, x_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} m_s(x_k),$$

$$m_s(x_k) = \mathbf{M}[(x_{k+1} - x_k)^s | x_k].$$

Отсюда с учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi} \int \exp[-iu(x_{k+1} - x_k)] (iu)^s\, du =$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)^s \frac{1}{2\pi} \int \exp[-iu(x_{k+1} - x_k)]\, du = \left(-\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)^s \delta(x_{k+1} - x_k),$$

получаем

$$\pi(x_{k+1} | x_k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)^s m_s(x_k)\, \delta(x_{k+1} - x_k). \tag{11.3.2}$$

Экстраполяция. Подставим (2) в (11.2.4) и поделим обе части получаемого равенства на $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Затем перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, учитывая при этом, что в рассматриваемом диффузионном марковском случае

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1(x)}{\Delta t} = a(x, t), \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_2(x)}{\Delta t} = b(x, t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_s(x)}{\Delta t} = 0, \quad s \geqslant 3. \tag{11.3.3}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial w_{t\tau}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} a(x, \tau) w_{t\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, \tau) w_{t\tau}, \quad \tau \geqslant t, \tag{11.3.4}$$

которое по форме совпадает с априорным уравнением — уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова (см. 1.2.32)). В качестве начального условия $w_{tt} = w_t$ для (4) необходимо взять решение $w_t(x)$ уравнения оптимальной нелинейной фильтрации (4.2.24), записанного либо в симметризованной форме, либо в форме Ито.

Тогда решение уравнения (4) даст АПВ $w_{t\tau}(x)=p(x_\tau|y_0^t)$ при $\tau>t$, которая и определяет оптимальные экстраполяционные оценки сигнала $S(x_\tau, \tau)$ и его параметра при условии, что в течение отрезка времени $[0, t]$ велось наблюдение сигнала на фоне белого шума.

Отметим, что само по себе уравнение (4) не является стохастическим и поэтому, естественно, инвариантно относительно различных форм записи стохастических выражений. Однако выбор той или иной формы записи (симметризованной или Ито) сказывается при определении начального условия для (4).

Интерполяция. Подставим теперь (2) в (11.2.8) и поделим на Δt. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, используя при этом разложение $(1+\Delta t)^{-1}=1-\Delta t+O[(\Delta t)^2]$ и соотношения (2), получим

$$\frac{\partial w_{t\tau}}{\partial \tau}=\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}[a(x, \tau)w_\tau]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x, \tau)w_\tau]\right\}-$$

$$-w_\tau\left\{a(x, \tau)\frac{\partial}{\partial x}\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}+\frac{1}{2}b(x, \tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}\right\}, \quad \tau<t. \tag{11.3.5}$$

Уравнение обратной интерполяции (5) можно записать в более компактном виде:

$$dw_{t\tau}=\left(\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}L_{pr}w_\tau+w_\tau L_{pr}^*\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}\right)d\tau, \tag{11.3.6}$$

здесь L_{pr}, L^*_{pr} — априорные операторы, соответствующие прямому и обратному уравнениям Колмогорова (см. (1.2.32) и (1.2.31)).

Начальное условие $w_{tt}=w_t$ определяется решением уравнения оптимальной нелинейной фильтрации (4.2.24). Кроме того, АПВ w_τ необходима и при $\tau<t$ (как и в случае дискретного времени). При этом для отыскания w_τ, $\tau\leqslant t$ уравнение (4.2.24) можно использовать либо в симметризованной форме записи, либо в форме Ито. Тогда соответственно различны интерполяционные оценки, получаемые с помощью (5).

Осуществляя предельный переход в рекуррентных соотношениях (11.2.11), (11.2.13), получим уравнения прямой интерполяции

$$d^*\tilde{w}_{t\tau}=L_{pr}\tilde{w}_{t\tau}dt+\frac{1}{N}(d\bar{y}_t-\hat{S}_t dt)[S(x, t)-\hat{S}_t]\tilde{w}_{t\tau}, \tag{11.3.7}$$

$$d^*w_{t\tau}=\frac{1}{N}w_{t\tau}(\bar{S}_t-\hat{S}_t)(d\bar{y}_t-\hat{S}_t dt), \tag{11.3.8}$$

где

$$\bar{y}_t=\int_0^t y_\tau d\tau,\ \hat{S}_t=M[S(x_t, t)|y_0^t],\ \bar{S}_t=M[S(x_t, t)|y_0^t, x_\tau]. \tag{11.3.9}$$

Уравнение (7) определяет двумерную АПВ $\tilde{w}_{t\tau}=p(x_\tau, x_t|y_0^t)$, а уравнение (8) — одномерную АПВ $w_{t\tau}=p(x_\tau|y_0^t)$; в обоих случаях $t>\tau=$ $=\text{const}$. Начальные условия имеют вид

$$\tilde{w}_{\tau\tau}=w_\tau\delta(x'_\tau-x_\tau), \qquad w_{\tau\tau}=w_\tau, \tag{11.3.10}$$

где $w_\tau=p(x_\tau|y_0^\tau)$. Заметим, что используя равенство

$$p(x_\tau, x_t|y_0^t)=p(x_t|y_0^t, x_\tau)\,p(x_\tau|y_0^t)$$

и формулу дифференцирования Ито, можно показать, что уравнение (7) следует из (6).

Переходя от стохастических уравнений Ито (7), (8) к симметризованным, будем иметь

$$d\widetilde{w}_{t\tau} = L_{pr}^{*}\widetilde{w}_{t\tau}dt + \frac{\widetilde{w}_{t\tau}}{N}\left\{[S(x, t) - \widehat{S}_t]\,d\overline{y}_t - \frac{1}{2}[S^2(x, t) - \widehat{S_t^2}]\,dt\right\}, \qquad (11.3.11)$$

$$dw_{t\tau} = \frac{w_{t\tau}}{N}\left\{(\overline{S}_t - \widehat{S}_t)\,d\overline{y}_t - \frac{1}{2}(\overline{S_t^2} - \widehat{S_t^2})\,dt\right\}, \qquad (11.3.12)$$

где

$$\widehat{S_t^2} = \mathrm{M}[S^2(x_t, t)\,|\,y_0^t], \quad \overline{S_t^2} = \mathrm{M}[S^2(x_t, t)\,|\,y_0^t, x_\tau].$$

Начальные условия аналогичны (10) с той только разницей, что АПВ w_τ определяется уравнением оптимальной нелинейной фильтрации в симметризованной форме (а не в форме Ито).

Отметим, что уравнения (6), (7), (11), (12) записаны для того случая, когда диффузионный марковский процесс $\{x_\tau\}$ и белый шум $\{\xi_\tau\}$, входящие в (1), статистически независимы. Если же сигнал и шум статистически взаимосвязаны, то указанные уравнения усложняются (см. [55]): появляются дополнительные члены, содержащие коэффициент взаимной диффузии c_t, определяемый соотношением

$$c_t dt = \sqrt{N}\,\mathrm{M}[d^*x_t d\omega_t\,|\,x_t = x,\ \omega_t = \omega]$$

$$\left(\omega_t = \frac{1}{\sqrt{N}}\int_0^t \xi_\tau d\tau\right).$$

Перейдем теперь к пределу в (11.2.15); в результате получим уравнение интерполяции с постоянным запаздыванием

$$d^*w_{t\tau} = \frac{w_{t\tau}}{N}(\overline{S}_{\tau+T} - \widehat{S}_{\tau+T})(d\overline{y}_{\tau+T} - \widehat{S}_{\tau+T}d\tau) +$$

$$+ \frac{w_{t\tau}}{w_\tau}L_{pr}w_\tau d\tau + w_\tau L^*_{pr}\frac{w_{t\tau}}{w_\tau}d\tau, \qquad (11.3.13)$$

определяющие АПВ $w_{t\tau} = p(x_\tau\,|\,y_0^t)$ при $t - \tau = T = \mathrm{const}$ и $c_t = 0$. Начальное условие $w_{T0} = p(x_0\,|\,y_0^T)$ находится из (8).

Уравнение (13) примечательно тем, что для его моделирования используются две шкалы времени: τ и $\tau + T = t$. Кроме того, для моделирования (13) необходимо запомнить на время T плотность w_τ и наблюдаемый процесс $\overline{y}_\tau$, что можно сделать, например, с помощью линии задержки.

11.3.2. Пример. Пусть $S(x_\tau, \tau) = x_\tau$, причем коэффициенты переноса и диффузии равны

$$a(x) = -\gamma x, \qquad b = \varkappa \qquad (11.3.14)$$

(непрерывный аналог примера п. 11.2.2). В этом случае АПВ w_τ и $w_{t\tau}$ являются гауссовскими:

$$w_\tau(x)=\sqrt{\frac{h_\tau}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{h_\tau}{2}(x-m_\tau)^2\right\},$$
$$w_{t\tau}(x)=\sqrt{\frac{h_{t\tau}}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{h_{t\tau}}{2}(x-m_{t\tau})^2\right\}. \tag{11.3.15}$$

Уравнения оптимальной фильтрации, описывающие m_τ, h_τ, уже получены: (4.3.13), (4.3.12).

Экстраполяция. Конкретизируя (4) с использованием (14) и $w_{t\tau}$ из (15), получаем уравнения оптимальной экстраполяции

$$\frac{\partial}{\partial\tau}m_{t\tau}=-\gamma m_{t\tau}, \tag{11.3.16}$$

$$\tau\geqslant t,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}h_{t\tau}=2\gamma h_{t\tau}-2\gamma\sigma^2h^2_{t\tau}, \tag{11.3.17}$$

где $\sigma^2=\varkappa/2\gamma$. Начальные условия для (16), (17) определяются при помощи (4.3.13), (4.3.12):

$$m_{tt}=m_t, \quad h_{tt}=h_t. \tag{11.3.18}$$

Оптимальная экстраполяционная оценка $d^*_{t\tau}=m_{t\tau}$, как следует из (16), (18), имеет вид

$$m_{t\tau}=m_t\exp\{-\gamma(\tau-t)\}, \quad \tau\geqslant t. \tag{11.3.19}$$

Функция m_t, определяемая уравнением (4.3.13), представляет собой оптимально отфильтрованный сигнал. В частном случае, когда шума нет, оценка m_t совпадает с самим полезным сигналом x_t, и тогда (19) совпадает с формулой «чистой» линейной экстраполяции стационарного экспоненциально-коррелированного процесса (см. [30, с. 307]).

Средний квадрат ошибки экстраполяции $D_{t\tau}=\mathrm{M}(x_\tau-m_{t\tau})^2$ равен $1/h_{t\tau}$. Решив уравнение (17) с учетом (18), найдем

$$D_{t\tau}=\left(\frac{1}{h_t}-\sigma^2\right)\exp[-2\gamma(\tau-t)]+\sigma^2, \quad \tau\geqslant t, \tag{11.3.20}$$

где h_t определяется формулой (4.3.21). Заметим, что при отсутствии шума ξ_t $(N=0)$ согласно (4.3.21) имеем $1/h_t=0$, и тогда (20) дает средний квадрат ошибки «чистой» экстраполяции.

Интерполяция. Конкретизируя (5) с помощью (14), (15), получим уравнения оптимальной обратной интерполяции

$$\frac{\partial}{\partial\tau}m_{t\tau}=\gamma(2\sigma^2h_\tau-1)m_{t\tau}-2\gamma\sigma^2h_\tau m_\tau, \tag{11.3.21}$$

$$\tau\leqslant t$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}h_{t\tau}=-2\gamma(2\sigma^2h_\tau-1)h_{t\tau}+2\gamma\sigma^2h^2_{t\tau}, \tag{11.3.22}$$

где функции m_τ, h_τ и начальные условия (18) определяются уравнениями фильтрации (4.3.13), (4.3.12).

Таким образом, оптимальная интерполяционная оценка $d^*_{t\tau}=m_{t\tau}$ $(\tau<t)$ сигнала x_τ, обеспечивающая минимум среднеквадратической ошибки, находится в результате линейных операций над наблюдаемым процессом $\{y_\tau\}$ в соответствии с (4.3.13), (4.3.12) и (21).

Средний квадрат ошибки интерполяции $1/h_{t\tau}$ определяется решением уравнения (22). Делая замену $h_{t\tau} = v_{t\tau}/2\gamma\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}(2\sigma^2 h_\tau - 1)$ и используя (4.3.12), найдем это решение, которое представим в виде

$$h_{t\tau} = h_\tau - h_{t\tau}^*, \quad \tau \leqslant t.$$

Здесь h_τ дается выражениями (4.3.21): $h^*_{t\tau}$ — определится теми же соотношениями (4.3.21), если в них t заменить на $\tau - t$, положить $c_0 = (c_1 + \gamma)/(c_1 - \gamma)$, а параметр c_1 оставить прежним.

Из найденных выражений следует, что $1/h_{t\tau} < 1/h_\tau$ при $\tau < t$, следовательно, точность интерполяционной оценки полезного сигнала в момент времени τ выше точности фильтрационной оценки в тот же момент. Отнсшение среднего квадрата ошибки интерполяции $D_{t\tau} = 1/h_{t\tau}$ к среднему квадрату ошибки фильтрации $D_\tau = 1/h_\tau$ имеет вид

$$\frac{D_{t\tau}}{D_\tau} = \frac{[c - c_0 \exp(-2c_1\tau)]\{1 + c\exp[-2c_1(\tau - t)]\}}{(1 + c)\{c\exp[-2c_1(\tau - t)] - c_0\exp(-2c_1\tau)\}}, \tag{11.3.23}$$

где c_1, c_0 определяются из (4.3.21), а $c = (c_1 + \gamma)/(c_1 - \gamma)$. Если время наблюдения t и время τ (момент вынесения оценки) достаточно велики, причем их разность $(t - \tau)$ также велика $(\longrightarrow \infty)$, то из (23) получаем следующее асимптотическое выражение:

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ \tau\to\infty \\ t-\tau\to\infty}} \frac{D_{t\tau}}{D_\tau} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+q}}\right), \tag{11.3.24}$$

где $q = 2\sigma^2/N\gamma$. При возрастании отношения сигнал/шум $(q \longrightarrow \infty)$ отношение (24) стремится к 1/2.

В другом крайнем случае $(t \longrightarrow \infty,\ \tau \longrightarrow 0)$ выражение (23) приобретает вид

$$\frac{D_{\infty 0}}{D_0} = \frac{q_0}{q_0 + \sqrt{1+q} - 1},$$

где $q_0 = 2\sigma^2 h_0$. Отсюда следует, что при конечных значениях h_0, σ^2 и малых шумах $(N\gamma \longrightarrow 0,\ q \longrightarrow \infty)$ отношение среднего квадрата ошибки интерполяции к среднему квадрату ошибки фильтрации в рассматриваемом асимптотическом случае $(t \longrightarrow \infty,\ \tau \longrightarrow 0)$ стремится к нулю.

Итак, из проведенного анализа вытекает, что выделить (оценить) полезные сигналы на фоне помех можно с меньшими ошибками, если вместо простой фильтрации использовать интерполяцию (фильтрацию с запаздыванием или сглаживание). Выигрыш в качестве оценивания зависит от конкретных значений параметров задачи $(\tau,\ t,\ q)$, причем он может быть весьма значительным.

С физической точки зрения этот эффект вполне понятен — он является следствием увеличения времени наблюдения смеси сигнала и шума. Однако, если сигнал — процесс с независимыми значениями и наблюдается к тому же в шуме с независимыми значениями, то никакого выигрыша не будет, поскольку вся информация, например, о k-й составляющей такого сигнала заключена в одном (k-м) отсчете, и увеличение времени ничего не даст. Этот крайний случай удобно проанализировать в задачах с дискретным временем. Полагая $R = 0$ в (11.2.21), получим $m_{nk} = m_k$, $h_{nk} = h_k$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. интерполяционная и фильтрационная оценки совпадают. В другом крайнем случае при $R = 1$ (полностью коррелированный сигнал) из (11.2.18), (11.2.21) находим $m_{nk} = m_n$, $h_{nk} = h_n$ $(k = 1, \ldots, n)$, т. е. интерполяционная оценка в любой точке совпадает с фильтрационной в конце интервала наблюдения, что является следствием неизменяемости сигнала во времени.

Таким образом, фильтрацию с запаздыванием имеет смысл применять при выделении частично коррелированных сигналов. Нетрудно видеть, что за обсуждаемое уменьшение ошибок (увеличение точности оценивания) приходится «платить» увеличением времени наблюдения и усложнением схемы обработки.

11.3.3. Квазиоптимальный синтез. Существование небольшого числа достаточных статистик, благодаря которым удается синтезировать строго оптимальные и сравнительно несложные схемы (как это было в рассмотренном примере), имеет место далеко не всегда. В общем же случае, чтобы осуществить моделирование алгоритмов интерполяции и экстраполяции сигналов при непрерывном параметре, приходится прибегать к конкретизации алгоритмов с помощью методов квазиоптимального синтеза, описанных в гл. 6. Остановимся здесь на одном из них — методе гауссовского приближения. Пусть наблюдается по-прежнему (1) с той только разницей, что параметр x_τ является марковским гауссовским процессом (как и в предыдущем примере).

Распределение вероятностей сигнала $S(x_\tau, \tau)$ зависит от его формы — вида функции S и, вообще говоря, является негауссовским, при этом АПВ $w_\tau(x)$ также будет негауссовской. Однако при условии большой апостериорной точности распределение $w_\tau(x)$ близко к гауссовскому распределению (см. п. 6.1.2).

Обратимся теперь к апостериорным распределениям $w_{t\tau}(x)$ ($\tau<t$, $\tau>t$), определяемым из уравнений (11.2.4), (11.2.8) при дискретном времени и (4), (5) при непрерывном. Особенностью этих уравнений является то, что они непосредственно не зависят от функции S (в отличие от уравнений фильтрации), а зависят только от статистики параметра x_τ. Хотя параметр x_τ предполагаем гауссовским, тем не менее АПВ $w_{t\tau}(x)$ ($\tau>t$, $\tau<t$) не являются (строго) гауссовскими. Это связано с тем, что АПВ $w_\tau(x)$, используемую при экстраполяции (в виде начального условия) и интерполяции, можно рассматривать как гауссовскую лишь приближенно при условии большой апостериорной точности. Поэтому и распределения $w_{t\tau}(x)$ будут гауссовскими лишь приближенно при том же условии.

Вследствие независимости (11.2.4), (11.2.8), (4), (5) от функции S уравнения для параметров АПВ w_{nk}, $w_{t\tau}$ в гауссовском приближении также не зависят от S и имеют прежний вид: (11.2.13) — (11.2.15), (16), (17), (21), (22). Таким образом, собственно алгоритмы экстраполяции и обратной интерполяции в рассматриваемом случае оказались инвариантными относительно формы сигнала S. Однако изменениям подвергаются алгоритмы фильтрации, дающие, в частности, начальные условия. Отметим также, что указанным свойством инвариантности не обладают алгоритмы прямой интерполяции и интерполяции с постоянным запаздыванием. Это видно, например, из уравнений (7), (8), (13), в которые непосредственно входят оценки сигнала $S(x_t, t)$, а в (7) — и сама функция S.

Данное свойство позволяет довольно быстро получать решения для целого ряда задач экстраполяции и обратной интерполяции сигналов при наличии шума, дополняя указанные выше уравнения соответствующими уравнениями фильтрации; последние можно взять из п. 6.1.2, § 6.2 и др.

В качестве примера остановимся кратко на задаче экстраполяции, когда полезный сигнал является частотно-модулированным и определяется соотношениями (6.2.6), (6.2.7). Как отмечалось, такой сигнал может служить моделью доплеровского сигнала, поэтому данная задача приобретает определенный практический смысл, например, в радиолокации, где требуется измерять и прогнозировать скорость движения объекта. Экстраполяционная оценка частоты, содержащая информацию о скорости радиолокационной цели, как нетрудно убедиться, определяется формулой (19), при этом начальное условие — фильтрационная оценка частоты — формируется при помощи схемы типа ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром, о которой шла речь в п. 6.2.2.

Глава 12

ПРИЕМ СИГНАЛОВ ПРИ НЕПОЛНОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

При решении задач обнаружения и оценивания в гл. 3—11 предполагалось, что априорные сведения о статистических свойствах сигналов и помех известны наблюдателю полностью (полная априорная информация *)). Очевидно, что исследование случаев неполной априорной информации, когда распределения вероятностей сигналов и помех заданы не полностью, представляет теоретический и практический интерес. Настоящая глава и посвящена задачам обнаружения и оценивания в подобных условиях.

12.1. АПРИОРНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И МЕТОДЫ ЕЕ ПРЕОДОЛЕНИЯ

12.1.1. Виды априорной неопределенности. В задачах приема сигналов наиболее характерной является параметрическая априорная неопределенность. В этом случае предполагается, что функциональный вид распределений вероятностей сигнала $p_\mu(x)$ и помехи $p_\nu(\eta)$ известен, однако векторные параметры $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_l)\in\Omega_1$ и $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)\in\Omega_2$, от которых зависят указанные распределения, неизвестны. Число неизвестных параметров предполагается конечным:

$$l+n<\infty. \qquad (12.1.1)$$

В практических задачах неизвестными могут быть постоянная составляющая, мощность, время корреляции и другие параметры сигналов и помех. Подобные параметры, по существу, можно рассматривать как параметры μ, ν распределений $p_\mu(x)$, $p_\nu(\eta)$.

К случаю параметрической априорной неопределенности приходим и тогда, когда функциональный вид распределения вероятностей непо-

*) Случай «полной априорной информации» не следует путать с вырожденным случаем максимальной априорной информации о сигналах и помехах, когда они являются полностью известными (детерминированными) функциями времени.

средственно не задан, но существует возможность аппроксимации распределений по той или иной системе базисных функций. Так, предположим, что распределения сигнала $p(x)$ и помехи $p(\eta)$ можно аппроксимировать функциями $p_{\mathbf{a}}(x)$ и $p_{\mathbf{b}}(\eta)$ соответственно, которые представимы в виде конечных разложений по заданным базисным функциям φ_i, ψ_i:

$$p_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x),$$
$$p_{\mathbf{b}}(\eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i(\eta). \qquad (12.1.2)$$

Выбор систем базисных функций $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ осуществляется разными способами. В частности, эти системы могут принадлежать пространству L^2 (множеству функций, интегрируемых с квадратом), являясь частями некоторых полных ортонормированных систем функций. Если

$$p(x) \in L^2, \quad p(\eta) \in L^2, \qquad (12.1.3)$$

то разложение (2) обеспечивает, как известно, любую наперед заданную точность аппроксимации $p(x)$, $p(\eta)$ (при соответствующих m и r). При этом при наилучшей аппроксимации в среднем параметры $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ являются коэффициентами Фурье функций $p(x)$, $p(\eta)$ по ортонормированным системам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ соответственно. Однако последнее обстоятельство мало в чем помогает, поскольку функции $p(x)$, $p(\eta)$ неизвестны, поэтому и коэффициенты $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ также неизвестны. В результате приходим к случаю параметрической априорной неопределенности: функциональный вид аппроксимирующих распределений $p_{\mathbf{a}}(x)$, $p_{\mathbf{b}}(\eta)$ известен, так как системы $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ заданы, а параметры $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ неизвестны. Отметим, что если $\{\varphi_i\} \in L^2$, $\{\psi_i\} \in L_2$, то в качестве априорных сведений, которые предполагаются известными, прежде всего выступает условие (3).

Параметрической априорной неопределенности противостоит случай непараметрической априорной неопределенности, при котором функциональный вид распределений сигнала и помехи неизвестен, причем нельзя указать аппроксимирующие разложения (2). Отметим, что при невыполнении неравенства (1) параметрическая априорная неопределенность, по существу, смыкается с непараметрической.

Случай непараметрической априорной неопределенности является наиболее трудным для исследования. Однако под этим видом априорной неопределенности мы не будем понимать случай полного отсутствия априорной информации о сигнале и помехе. Какие-то априорные сведения о распределениях вероятностей сигнала и помехи должны быть известны. Например, в качестве таковых может выступать свойство симметрии указанных распределений, независимость выборочных значений наблюдаемого процесса и др.

12.1.2. Байесовский метод. Способы преодоления априорной трудности в задачах обнаружения и оценивания сигналов основываются на методах математической статистики, и в частности, на тех, о которых шла речь в гл. 2. Среди этих методов важное место занимает байесовский подход. Применительно к рассматриваемой здесь задаче байесовский метод преодоления априорной неопределенности сводится к следующему.

Предполагается, что неизвестные параметры μ, v распределений сигнала $p_\mu(x)$ и помехи $p_v(\eta)$ можно интерпретировать как случайные векторные величины, распределения вероятностей которых существуют (предположение, аналогичное (1) в п. 2.1.2). При этом $p_\mu(x)$, $p_v(\eta)$ рассматриваются как условные (см. п. 1.1.3) распределения вероятностей $p(x|\mu)$, $p(\eta|\mathbf{v})$. Далее возможны две постановки задачи.

1) Распределения вероятностей случайных векторов μ, $\mathbf{v}$ предполагаются известными. Будем называть эту постановку строго байесовской.

2) Распределения вероятностей случайных векторов μ, $\mathbf{v}$ неизвестны. Эту постановку задачи назовем частично байесовской.

При строго байесовской постановке, зная распределения $p(\mu)$, $p(\mathbf{v})$ величин μ, $\mathbf{v}$, можно записать совместные распределения

$$p(x \mid \mu)\, p(\mu) = p(x, \mu),$$
$$p(\eta \mid \mathbf{v})\, p(\mathbf{v}) = p(\eta, \mathbf{v}),$$

а также распределения

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{\Omega_1} p(x \mid \mu)\, p(\mu)\, d\mu, \\ p(\eta) &= \int_{\Omega_2} p(\eta \mid \mathbf{v})\, p(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{12.1.4}$$

(Предполагаем, что сигнал, помеха и параметры μ, $\mathbf{v}$ — непрерывные величины, при этом соответствующие распределения являются плотностями вероятностей.) Распределения (4) уже не содержат неизвестных параметров. В результате такой процедуры мы пришли к задаче с полностью известными распределениями $p(x)$, $p(\eta)$ сигнала и помехи. Теперь можно вычислить апостериорное распределение сигнала, апостериорный и байесовский риски, осуществить синтез и анализ оптимальных алгоритмов приема сигналов. Принципиальных трудностей на этом пути нет, однако вычислительные трудности могут быть весьма значительными.

При частично баейсовской постановке задачи, когда плотности $p(\mu)$, $p(\mathbf{v})$ неизвестны, можно воспользоваться, например, постулатом Байеса, согласно которому априорные распределения считаются равномерными:

$$\begin{aligned} p(\mu) &= \text{const}, \quad \mu \in \Omega_1; \\ p(\mathbf{v}) &= \text{const}, \quad \mathbf{v} \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{12.1.5}$$

Такое предположение характеризует наибольшую априорную неопределенность относительно параметров μ, $\mathbf{v}$. Следует, однако, отметить, что постулат Байеса не имеет строгого обоснования. Тем не менее, он часто используется в задачах обнаружения и оценивания сигналов.

Особую важность для обоснования байесовского подхода при неизвестных априорных распределениях имеет следующее обстоятельство. Если время наблюдения достаточно велико, то результат обработки сигналов, полученный с помощью байесовского алгоритма, во многих случаях оказывается малочувствительным к выбору априорного распределения. Благодаря этому, плотности вероятностей $p(\mu)$ и $p(\mathbf{v})$ можно задавать более или менее произвольным образом. Эта инвари-

антность результата обработки сигналов относительно априорных распределений обусловлена свойством сходимости байесовских алгоритмов [106]. Указанное свойство приводит к «адаптации» или «самонастройке» байесовских алгоритмов относительно неизвестных параметров. Поясним это на достаточно общей задаче, когда наблюдается последовательность непрерывных зависимых случайных величин

$$y_n = x_n + \eta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12.1.6}$$

при этом распределение вероятностей сигнала x_n зависит от неизвестного параметра $\mu \in \Omega$, который будем считать случайной величиной. Предположим, что существует априорная плотность $p(\mu)$, причем $p(\mu) > 0$ всюду на Ω (Ω — отрезок действительной числовой оси). При довольно слабых (с точки зрения практики) ограничениях, накладываемых на распределения сигнала и помехи (условие регулярности, непрерывность по μ и др., см. [106]), байесовская оценка $\widehat{\mu}_n$ параметра μ на n-м шаге наблюдения

$$\widehat{\mu}_n = \int \int \mu p(\mu, x_n | y_1^n) \, d\mu dx_n$$

и байесовская оценка сигнала

$$\widehat{x}_n = \int\int x_n p(\mu, x_n | y_1^n) \, d\mu dx_n$$

сходятся при $n \to \infty$ с вероятностью 1 к истинному значению параметра μ_0 и к БСО $\hat{x}_n(\mu_0)$ сигнала x_n при известном значении μ_0

$$\widehat{x}_n(\mu_0) = \int x_n p(x_n | \mu_0, y_1^n) \, dx_n, \tag{12.1.7}$$

т. е.

$$\widehat{\mu}_n \xrightarrow{\text{п. н}} \mu_0, \tag{12.1.8}$$

$$\widehat{x}_n \xrightarrow{\text{п. н}} \widehat{x}_n(\mu_0). \tag{12.1.9}$$

Соотношения (8), (9) выполняются независимо от конкретного вида априорной плотности $p(\mu)$ неизвестного параметра.

Итак, рассматриваемый байесовский метод преодоления априорной неопределенности получает обоснование в результате исследования сходимости алгоритмов. Что касается самих методов синтеза адаптивных байесовских алгоритмов, обладающих свойством сходимости к алгоритмам при полной априорной информации, то они в значительной степени основываются, как будет ясно из дальнейшего, на методах, изложенных в предыдущих главах.

12.1.3. Небайесовские параметрические методы. К этому широкому классу методов преодоления априорной неопределенности относятся все те параметрические методы, при которых не делается байесовских предположений относительно неизвестных параметров μ, ν распределений сигнала $p(x|\mu)$ и помехи $p(\eta|\nu)$. Более удобно оперировать с распределениями наблюдаемого процесса $p(y|\mu, \nu, \theta=1)$, $p(y|\nu, \theta=0)$ при наличии ($\theta=1$) и отсутствии ($\theta=0$) сигнала, а также с апостериорным распределением сигнала $p(x|y, \mu, \nu, \theta=1)$.

Небайесовскими параметрическими являются, в частности, методы, основанные на подстановке в указанные распределения вероятностей вместо неизвестных параметров μ, ν их небайесовских оценок, напри-

мер ОМП. Последние находятся по наблюдаемым данным (см. п. 2.3.3), при этом

$$p(y\,|\,\widehat{\widehat{\mu}}, \widehat{\widehat{\nu}}_1\, \theta=1) = \sup_{\mu,\,\nu} p(y\,|\,\mu, \nu, \theta=1),$$

$$p(y\,|\,\widehat{\widehat{\nu}}_0, \theta=0) = \sup_{\nu} p(y\,|\,\widehat{\widehat{\nu}}, \theta=0).$$

В результате получаются распределения $p(y\,|\,\widehat{\widehat{\mu}}, \widehat{\widehat{\nu}}_1, \theta=1)$, $p(y\,|\,\widehat{\widehat{\nu}}_0, \theta=0)$, $p(x\,|\,y, \widehat{\widehat{\mu}}, \widehat{\widehat{\nu}}_1, \theta=1)$, которые уже не содержат неизвестных параметров и могут использоваться при синтезе тех или иных алгоритмов обработки сигналов.

Пусть, например, наблюдается коррелированная последовательность (6), причем распределение сигнала x_n по-прежнему зависит от неизвестного параметра $\mu \in \Omega$, который теперь не является случайной величиной. Определив ОМП $\widehat{\widehat{\mu}}_n$

$$p(y_1^n\,|\,\widehat{\widehat{\mu}}_n) = \sup_{\mu} p(y_1^n\,|\,\mu),$$

можно найти оценку сигнала

$$\widehat{x}_n(\widehat{\widehat{\mu}}) = \int x_n p(x_n\,|\,y_1^n, \widehat{\widehat{\mu}})\, dx_n. \qquad (12.1.10)$$

При выполнении общих условий [106] оценка $\widehat{\widehat{\mu}}_n$ сходится по вероятности к истинному значению μ_0 параметра μ, а оценка (10) сигнала сходится по вероятности к БСО $\hat{x}_n(\mu_0)$ (7).

Таким образом, метод синтеза, основанный на подстановке ОМП в распределение вероятностей (вместо неизвестного параметра), приводит к алгоритму, обладающему свойством сходимости к соответствующему алгоритму при известном параметре, т. е. этот небайесовский метод, так же как и байесовский, приводит к адаптивным алгоритмам.

В задачах обнаружения применяется обобщенный критерий отношения правдоподобия (см. п. 2.2.6), который также основан на подстановке ОМП в распределения вероятностей. Если наблюдается последовательность

$$y_n = \theta x_n + \eta_n; \quad n = 1, 2, \ldots, \theta = 0, 1$$

и распределения сигнала и помехи зависят от неизвестных параметров μ и ν соответственно, то согласно указанному критерию используется статистика

$$\Lambda^*_n = \frac{\sup\limits_{\mu,\nu} p(y_1^n\,|\,\mu, \nu, \theta=1)}{\sup\limits_{\nu} p(y_1^n\,|\,\nu, \theta=0)} = \frac{p(y_1^n\,|\,\widehat{\widehat{\mu}}, \widehat{\widehat{\nu}}_1, \theta=1)}{p(y_1^n\,|\,\widehat{\widehat{\nu}}_0, \theta=0)}. \qquad (12.1.11)$$

Эта статистика сравнивается с порогом, определяемым по заданной вероятности ложной тревоги.

Рассматриваемый критерий является состоятельным, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\{\Lambda^*_n \in \Gamma_1\,|\,\theta=1\} = 1 \qquad (12.1.12)$$

— вероятность правильного обнаружения при неограниченном увеличении объема выборки стремится к единице при условии, что

$$P\{\Lambda_n^* \in \Gamma_1 | \theta = 0\} \leqslant \alpha \tag{12.1.13}$$

— вероятность ложной тревоги ограничена заданным числом α $(0<\alpha<1)$ для любых n.

Обобщенный критерий отношения правдоподобия обладает в асимптотике $(n \to \infty)$ и другими полезными свойствами (асимптотическая мощность критерия и др., см. [49, 136]).

К небайесовским параметрическим методам преодоления априорной неопределенности относятся также методы, основанные на равномерно наиболее мощных, несмещенных, подобных и инвариантных критериях (см. п. 2.2.6).

Рассмотрим одну простую задачу обнаружения, для которой может существовать равномерно наиболее мощное решающее правило. Пусть требуется обнаружить постоянный сигнал S в аддитивном гауссовском шуме с независимыми значениями, нулевым средним и известной дисперсией σ_0^2. Вначале будем считать, что величина S известна. В такой задаче ЛП

$$z_n = \ln \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y_i - S)^2}{2\sigma_0^2}\right]}{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y_i^2}{2\sigma_0^2}\right]} = \frac{S}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{S^2}{2\sigma_0^2} n.$$

Согласно критерию Неймана — Пирсона (см. п. 2.2.2) оптимальный обнаружитель принимает решение о наличии сигнала

$$\delta^*(\mathbf{y}) = d_1, \quad \text{если } \frac{S}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{S^2}{2\sigma_0^2} n \geqslant h \tag{12.1.14}$$

$(\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_n,\ h$ — порог обнаружения). Если сигнал положительный $(S>0)$, то правило (14) эквивалентно

$$\delta^*(\mathbf{y}) = d_1, \quad \text{если } \tilde{z}_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant \frac{Sn}{2} + \frac{h\sigma_0^2}{S} = h^*. \tag{12.1.15}$$

В случае $S<0$ имеем

$$\delta^*(\mathbf{y}) = d_1, \quad \text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \frac{Sn}{2} + \frac{h\sigma_0^2}{S} = h^{**}. \tag{12.1.16}$$

Пороги h^* и h^{**} определяются по заданной вероятности ложной тревоги:

$$\alpha = \int_{h^*}^{\infty} p(\tilde{z}_n | \theta = 0)\, d\tilde{z}_n = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi n}} \int_{h^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{\tilde{z}_n^2}{2n\sigma_0^2}\right) d\tilde{z}_n, \tag{12.1.17}$$

$$\alpha = \int_{-\infty}^{h^{**}} p(\tilde{z}_n | \theta = 0)\, d\tilde{z}_n = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{h^{**}} \exp\left(-\frac{\tilde{z}_n^2}{2n\sigma_0^2}\right) d\tilde{z}_n. \tag{12.1.18}$$

Из (15), (17) видно, что оптимальное по критерию Неймана — Пирсона правило обнаружения положительного сигнала не зависит от его величины. Это означает, что решающее правило

$$\delta^*(\mathbf{y})=\begin{cases} d_1, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant h^*, \\ d_0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i < h^* \end{cases} \tag{12.1.19}$$

при заданной вероятности ложной тревоги минимизирует вероятность пропуска сигнала сразу для всех $S>0$, т. е. является равномерно наиболее мощным. Если же $S<0$, то, как следует из (16), (18), равномерно наиболее мощным правилом будет

$$\delta^*(\mathbf{y})=\begin{cases} d_1, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant h^{**}, \\ d_0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} y_i > h^{**}. \end{cases} \tag{12.1.20}$$

Подчеркнем, что правила обнаружения (19) и (20) являются равномерно наиболее мощными лишь в том случае, если имеется частичная априорная информация о сигнале: известно, что либо $S>0$, либо $S<0$. Если же такой информации нет и обнаруживаемый сигнал может быть как положительным, так и отрицательным: $-\infty<S<+\infty$ — то равномерно наиболее мощного правила не существует.

В рассматриваемый класс небайесовских параметрических методов преодоления априорной неопределенности входит и минимаксный метод (см. п. 2.1.3). Нахождение минимаксного решения, как уже отмечалось, является трудной задачей. Если для его отыскания используется наименее благоприятное распределение $\tilde{F}_0$ (см. (2.1.12)), то минимаксный метод преодоления априорной неопределенности смыкается с байесовским.

12.1.4. Непараметрические методы. Этот класс методов предназначен для преодоления непараметрической априорной неопределенности (см. п. 12.1.1).

Основой для непараметрических способов обнаружения и оценивания сигналов служат непараметрические методы математической статистики [26, 153]; ряд результатов по непараметрической статистике имеется в [49, 67, 136]. Следует отметить, что непараметрические методы в отличие от параметрических еще не образуют логически стройной теории. Что же касается применений непараметрических методов в задачах приема сигнала, то основные результаты здесь связаны с использованием знаковых и ранговых статистик, обладающих некоторыми инвариантными свойствами.

Пусть

$$\mathbf{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \tag{12.1.21}$$

— исходная последовательность наблюдаемых величин. Знаковой статистикой называется вектор

$$\operatorname{sign}\mathbf{y}=(\operatorname{sign} y_1,\ \ldots,\ \operatorname{sign} y_n), \tag{12.1.22}$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathbf{V}$ пространство всех векторов $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ таких, что $v_i = 1$ или -1. Нетрудно видеть, что $\mathbf{V}$ содержит 2^n элементов. Если исходный процесс $\{y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ является случайным процессом с независимыми значениями и описывается произвольной симметричной плотностью вероятностей

$$p(y_i) = p(-y_i), \quad -\infty < y_i < \infty, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12.1.23}$$

то статистика (22) имеет распределение

$$P\{\operatorname{sign} \mathbf{y} = \mathbf{v}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Таким образом, редукция наблюдаемых данных до знаков приводит к тому, что распределение вероятностей получаемой статистики оказывается инвариантным относительно распределения исходных величин, если только последние независимы и выполняется условие (23). Это обстоятельство и определяет то, что алгоритмы приема сигналов, построенные на основе знаковой статистики, также будут обладать некоторыми инвариантными («непараметрическими») свойствами.

В качестве примера рассмотрим одну непараметрическую задачу обнаружения. Пусть независимые наблюдаемые данные (21) представляют собой либо шум ($\theta = 0$), о котором известно только то, что его плотность вероятностей обладает свойством (23), либо смесь сигнала и шума ($\theta = 1$). При этом естественно считать, что при наличии сигнала свойство симметрии (23) для наблюдаемой последовательности будет нарушено. Если ввести вероятность

$$p = P\{y_i > 0\}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{12.1.24}$$

то, как следует из (23), в случае $\theta = 0$ имеем $p = 1/2$. Предположив, например, что полезный сигнал является положительным, будем иметь $p > 1/2$ при $\theta = 1$.

Для решения этой задачи обнаружения естественно воспользоваться знаковым обнаружителем [48, 133]

$$\sum_{i=1}^{n} \vartheta(y_i) \mathop{\gtrless}_{d_0}^{d_1} h, \tag{12.1.25}$$

где

$$\vartheta(y_i) = \begin{cases} \operatorname{sign} y_i = 1, & y_i > 0, \\ 0, & y_i \leqslant 0, \end{cases}$$

h — порог, определяемый заданной вероятностью ложной тревоги α. Статистика $z_n = \sum_{i=1}^{n} \vartheta(y_i)$ имеет, очевидно, биномиальное распределение с параметром p (24), при этом

$$P\{z_n = k \mid \theta = 1\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$P\{z_n = k \mid \theta = 0\} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ (число сочетаний из n по k). Вероятность правильного обнаружения D равна

$$D = \sum_{k=h+1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где h — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha \leqslant \sum_{k=h+1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Отсюда видно, что порог h и вероятность ложной тревоги не зависят от распределения вероятностей шума.

Таким образом, при независимых наблюдениях и симметричном распределении шума знаковый обнаружитель (25) является непараметрическим обнаружителем для ситуации $\theta=0$. Этого, конечно, следовало ожидать вследствие отмеченного ранее инвариантного свойства знаковой статистики (22).

Сравнить эффективность того или иного непараметрического обнаружителя с другими непараметрическими, а также «параметрическими» обнаружителями можно, как обычно, по характеристикам обнаружения (если, конечно, последние удается рассчитать), определяя выигрыш (или проигрыш) в пороговом сигнале — величине отношения сигнал/шум при одинаковых вероятностях D и α. Однако часто удобнее использовать для сравнения коэффициент асимптотической относительной эффективности (АОЭ), который определяется следующим образом.

Пусть δ_1 и δ_2 — алгоритмы обнаружения, имеющие одинаковую вероятность ложной тревоги α, а $n_{\delta_1}(\alpha, D, P)$, $n_{\delta_2}(\alpha, D, P)$ — наименьшие числа наблюдений, при которых вероятность правильного обнаружения для алгоритмов δ_1 и δ_2 не меньше D при одинаковом распределении P смеси сигнала и шума на входах обнаружителей. Отношение

$$e = \frac{n_{\delta_1}(\alpha, D, P)}{n_{\delta_2}(\alpha, D, P)} \qquad (12.1.26)$$

может служить мерой эффективности алгоритма δ_1 относительно алгоритма δ_2. Вычисление относительной эффективности (26) в общем случае затруднительно. Очевидно, что расчеты существенно упростятся, если перейти к рассмотрению асимптотических задач, в частности, при неограниченном увеличении объема выборки. При этом, чтобы вероятность правильного обнаружения оставалась постоянной величиной, меньшей единицы, необходимо соответственно уменьшать ($\to 0$) полезный сигнал.

В результате коэффициент АОЭ определяется как предел относительной эффективности (26) при $n_{\delta_1} \to \infty$, $n_{\delta_2} \to \infty$ и сближении обеих ситуаций: $(\theta = 1) \to (\theta = 0)$.

Если, например, вычислить АОЭ знакового алгоритма (25) по отношению к «линейному» алгоритму (19) при обнаружении постоянного сигнала в шуме с независимыми значениями и симметричной плотностью вероятностей $p(\eta)$, то [48, 133]:

$$\text{АОЭ} \approx 4\sigma_0^2 p^2(0), \qquad (12.1.27)$$

где σ_0^2 — дисперсия шума.

В случае гауссовского шума $p(0)=1/\sigma_0\sqrt{2\pi}$ и, следовательно, АОЭ$=2/\pi\approx0{,}64$. То, что коэффициент АОЭ в этом случае меньше единицы, вполне естественно: знаковый обнаружитель сравнивался с линейным (19), который при обнаружении постоянного положительного сигнала в гауссовском шуме является равномерно наиболее мощным, т. е. оптимальным.

Для других же распределений шума эффективность знакового обнаружения может оказаться выше эффективности линейного, т. е. коэффициент (27) может быть больше единицы. Например, в том случае, когда распределение шума подчиняется закону Лапласа:

$$p(\eta)=(a/2)\exp(-a|\eta|), \quad -\infty<\eta<\infty,$$

имеем $\sigma_0^2=2/a^2$ и, согласно (27), АОЭ$=2$.

Непараметрические свойства обнаружителей можно несколько усилить, если синтезировать алгоритмы на основе ранговой статистики. Последняя определяется следующим образом.

Расположив наблюдаемые данные (21) в порядке их возрастания $y_i\geqslant y_j$, $i>j$, получим упорядоченную выборку (вариационный ряд):

$$y^{(1)}\leqslant y^{(2)}\leqslant\ldots\leqslant y^{(i)}\leqslant\ldots\leqslant y^{(n)}, \qquad (12.1.28)$$

где $y^{(i)}$ представляет собой i-ю по величине компоненту вектора (21). Элементы вариационного ряда (28) называются порядковыми статистиками. Далее предположим, что для вектора (21) никакие две компоненты не совпадают, и обозначим через $r_i(\mathbf{y})$ число компонент, не превосходящих y_i, т. е. номер компоненты y_i в вариационном ряду:

$$y_i=y^{(r_i)}, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Статистика $R_i=r_i(\mathbf{y})$ называется рангом компоненты y_i, а вектор $\mathbf{R}=(R_1, \ldots, R_n)$ — ранговым вектором или ранговой статистикой.

Обозначим пространство всех перестановок $\mathbf{r}=(r_1, \ldots, r_n)$ целых чисел $(1, \ldots, n)$ через $\widetilde{\mathbf{R}}$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\mathbf{R}}$ содержит $n!$ элементов. Если исходный процесс $\{y_i, i=1, 2, \ldots\}$ является стационарным случайным процессом с независимыми значениями, то ранговая статистика обладает распределением

$$P\{\mathbf{R}=\mathbf{r}\}=\frac{1}{n!}, \quad \mathbf{r}\in\widetilde{\mathbf{R}}. \qquad (12.1.29)$$

Таким образом, редукция наблюдаемых данных до рангов привела к тому, что распределение вероятностей ранговой статистики, как и в случае знаковой статистики, оказалось инвариантным относительно распределения исходных величин. При этом степень инвариантности ранговой статистики выше, чем знаковой, поскольку свойство симметрии (23) плотности вероятностей наблюдаемых величин для записи (29) не потребовалось. Очевидно, алгоритмы обнаружения, построенные на основе ранговой статистики, обладают непараметрическим свойством: сохраняют вероятность ложной тревоги постоянной при любых распределениях шума, если только последний является стационарным процессом с независимыми значениями.

Для непараметрического обнаружения можно также использовать ранговую статистику $\mathbf{R}^+=(R^+_1, \ldots, R^+_n)$ для абсолютных величин

наблюдений $|y_1|, \ldots, |y_n|$. Аналогично предыдущему, ранг $\mathbf{R}^+_i$ компоненты $|y_i|$ представляет собой порядковый номер этой компоненты в вариационном ряду, при этом

$$y_i = |y_i|^{(R_i^+)} \operatorname{sign} y_i.$$

Если исходный процесс $\{y_i, i=1, 2, \ldots\}$ является стационарным процессом с независимыми значениями, плотность вероятностей которого удовлетворяет условию симметрии, то

$$P\{\mathbf{R}^+ = \mathbf{r}\} = \frac{1}{n!}, \quad \mathbf{r} \in \tilde{\mathbf{R}}.$$

Отсюда видно, что степень инвариантности ранговой статистики $\mathbf{R}^+$ относительно свойств исходных наблюдений та же, что и у знаковой статистики. Однако преимущество статистики $\mathbf{R}^+$ может проявиться в увеличении эффективности обнаружителей, построенных на $\mathbf{R}^+$, ибо эта статистика, очевидно, в ряде случаев может оказаться информативнее, чем статистика, используемая в знаковом обнаружителе.

Действительно, применив для обнаружения сигнала в стационарном шуме с независимыми значениями и симметричной плотностью $p(\cdot)$ критерий Вилкоксона [26, 48, 133]

$$\sum_{y_i > 0} R_i^+ \gtrless h', \tag{12.1.30}$$

получим его АОЭ относительно линейного обнаружителя:

$$\text{АОЭ} = 12\sigma_0^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x)\, dx \right]^2, \tag{12.1.31}$$

где σ_0^2 — дисперсия шума. Отсюда следует, что для гауссовского шума АОЭ=0,95. (Напомним, что АОЭ знакового обнаружителя относительно линейного равна 0,64.) Важно, что из минимизации соотношения (31) по $p(x)$ следует существование нижней грани для АОЭ, равной 0,864.

Непараметрический обнаружитель (30) относится к классу линейных ранговых обнаружителей. При построении непараметрических обнаружителей используют и другие линейные, а также нелинейные ранговые критерии [26].

Для преодоления непараметрической априорной неопределенности применяют и метод стохастической аппроксимации [13, 79, 145], в основе которого лежит работа [163]. Этот итерационный метод позволяет решать и параметрические задачи, причем именно в данном направлении он получил наибольшее развитие.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению методов приема сигналов в условиях априорной неопределенности, ограничившись параметрическими методами, приводящими к адаптивным алгоритмам [97—99, 103].

12.2. АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ)

12.2.1. Общие алгоритмы. Наблюдаемые данные определим выражением

$$y_k = \theta S(\mathbf{x}_k, t_k) + \xi_k, \tag{12.2.1}$$

где $\{\xi_k\}$ — случайный процесс с независимыми значениями (шум), для которого плотность вероятностей $\rho\{\xi_k, t_k\}$ известна; S — заданная функция: $\{\mathbf{x}_k\} = \{x_{1k}, \ldots, x_{uk}\})$ — u-мерный марковский процесс с дискретным временем. Предполагается, что переходные плотности вероятностей $\pi_\mu(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, t_k)$ процесса $\{\mathbf{x}_k\}$ заданы не полностью, а именно: наблюдателю неизвестны значения параметров $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$, от которых зависят распределения.

Следуя байесовскому подходу (см. п. 12.1.2), будем считать, что вектор μ представляет собой совокупность случайных величин, при этом переходную плотность $\pi_\mu(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, t_k)$ можно записать в виде $\pi(x_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mu, t_k)$. Вектор случайных величин μ можно рассматривать как вырожденный векторный марковский процесс, переходная плотность вероятностей которого является многомерной дельта-функцией $\delta(\mu_{k+1} - \mu_k)$ (в частности, $\delta(\mu_{k+1} - \mu_k) = \prod_{i=1}^{l} \delta(\mu_{i,k+1} - \mu_{ik})$).

Далее поступим следующим образом. Дополним марковский процесс $\{\mathbf{x}_k\}$ компонентами указанного вырожденного марковского процесса. При этом получим объединенный случайный процесс $\{\mathbf{x}_k, \mu\}$, который также является марковским и для которого переходная плотность равна

$$\pi' = \pi(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mu, t_k)\, \delta(\mu_{k+1} - \mu). \tag{12.2.2}$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче: наблюдается процесс (1), причем полезный сигнал представляет собой известную функцию части компонент векторного марковского процесса $\{\mathbf{x}_k, \mu\}$ с переходной плотностью вероятностей (2). В результате расширения исходного марковского процесса осуществляется переход от случая с не полностью известной переходной плотностью к случаю с полностью известной переходной плотностью вероятностей. Далее можно использовать методы рекуррентных соотношений, развитые в предыдущих главах.

Введем апостериорную плотность вероятностей

$$w_k(\mathbf{x}_k, \mu) = p(\mathbf{x}_k, \mu, t_k | y^k{}_1, \theta = 1). \tag{12.2.3}$$

Она позволяет оценивать не только сигнал (процесс x_k), но и неизвестные параметры его распределения вероятностей, которые в конечном счете можно рассматривать как параметры самого сигнала. Применяя методику п. 4.1.2 (несколько обобщив ее) к рассматриваемой задаче, получим [97] рекуррентные соотношения для АПВ:

$$w_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mu) = \frac{\int \ldots \int \rho\,[y_{k+1} - S(\mathbf{x}_{k+1})]\, \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mu)\, w_k(\mathbf{x}_k, \mu)\, d\mathbf{x}_k}{\int \ldots \int \rho[y_{k+1} - S(\mathbf{x}_{k+1})]\, \pi(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k, \mu)\, w_k(\mathbf{x}_k, \mu)\, d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1} d\mu} \tag{12.2.4}$$

и для ОП:

$$\Lambda_k = p(y_1^k|\theta=1)/p(y_1^k|\theta=0),$$

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1})} \int \dots \int \rho[y_{k+1} - S(\mathbf{x}_{k+1})] \pi(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mu) w_k(\mathbf{x}_k, \mu) d\mathbf{x}_k d\mathbf{x}_{k+1} d\mu. \quad (12.2.5)$$

Рекуррентное соотношение (4) составляет основу для построения алгоритмов линейной и нелинейной фильтрации в условиях параметрической априорной неопределенности о полезном сигнале. При этом получаемые алгоритмы попутно с оценкой сигнала формируют оценки неизвестных параметров его распределения. Оценка сигнала определяется задаваемой функцией потерь и АПВ $w_k(\mathbf{x}_k)$, которая связана с (3), (4) выражением

$$w_k(\mathbf{x}_k) = \int \dots \int w_k(\mathbf{x}_k, \mu) d\mu.$$

Рекуррентные соотношения (5) и (4) определяют алгоритм совместного обнаружения и фильтрации сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности.

Остановимся теперь на вопросе об оптимальности полученных алгоритмов. Этот вопрос тесно связан с вопросом о начальных условиях алгоритмов. Последний, в свою очередь, связан с тем, какая из байесовских постановок (п. 12.1.2) задачи рассматривается.

При строго байесовской задаче известное распределение вектора μ позволяет записать начальную плотность вероятностей $\pi_0(\mathbf{x}_1, \mu)$, которая и дает начальные условия для рекуррентных соотношений (4), (5):

$$w_1(\mathbf{x}_1, \mu) = \frac{\rho[y_1 - S(\mathbf{x}_1)] \pi_0(\mathbf{x}_1, \mu)}{\int \dots \int \rho[y_1 - S(\mathbf{x}_1)] \pi_0(\mathbf{x}_1, \mu) d\mathbf{x}_1 d\mu}, \quad (12.2.6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\rho(y_1)} \int \dots \int \rho[y_1 - S(\mathbf{x}_1)] \pi_0(\mathbf{x}_1, \mu) d\mathbf{x}_1 d\mu. \quad (12.2.7)$$

В этом случае соотношения (4) и (5) определяют оптимальные алгоритмы, причем оптимальность понимается в обычном байесовском смысле.

Рассмотрим теперь частично байесовскую постановку задачи, при которой распределение вектора μ неизвестно. Здесь нужно отметить следующее: распределение вероятностей вектора μ не влияет на переходную плотность (2) и на общий вид рекуррентных соотношений (4), (5); оно влияет лишь на начальные условия (6), (7). При этом в данной постановке задачи начальные условия становятся неопределенными.

Однако здесь начинает играть важную роль асимптотическое свойство апостериорной плотности случайного параметра и байесовских алгоритмов в целом. При увеличении времени наблюдения ($n \to \infty$) АПВ стремится к дельта-образному (относительно неизвестного параметра) виду, причем конечный результат не зависит от выбора априорного распределения параметра [106]. Это позволяет в случае незаданного распределения неизвестных параметров выбирать начальное условие для рекуррентного соотношения (4) более или менее произвольно. При этом асимптотически ($n \to \infty$) обеспечивается сходимость алгоритма (4) к байесовскому алгоритму при полной априорной ин-

формации. Таким образом, при частично байесовской задаче оптимальность алгоритма фильтрации нужно понимать в асимптотическом смысле.

Что касается статистики (5), используемой при обнаружении, то здесь имеются некоторые особенности. Наблюдаемые данные в задаче обнаружения (1) относятся к двум различным классам. При $\theta=0$ функция w_k уже не является апостериорной плотностью в смысле (3), при этом нет и указанной ранее сходимости. При $\theta=1$ имеет место сходимость АПВ параметра к дельта-образному виду, тем не менее статистика (5) и отношение правдоподобия при известном параметре, вообще говоря, асимптотически не эквивалентны. Однако обнаружитель, сравнивающий статистику (5) с порогом, является состоятельным, т. е. при заданной вероятности ложной тревоги и $n\to\infty$ вероятность правильного обнаружения стремится к единице.

Отметим, что адаптивные алгоритмы (4), (5) допускают обобщение на те случаи, когда помеха является коррелированной, причем статистически не полностью заданной [101]. Кроме того, излагаемый метод расширения исходного марковского процесса путем присоединения к нему неизвестных параметров, которые рассматриваются как случайные величины, позволяет дать непосредственное обобщение алгоритмов экстраполяции и интерполяции на случай параметрической априорной неопределенности.

Непосредственное обобщение допускает и алгоритм формирования ОП (7.1.20) при произвольных сигнале x_k и помехе η_k. В случае параметрической априорной неопределенности относительно x_k, η_k этот алгоритм сохраняет прежний вид с тем отличием, что при вычислении условного математического ожидания M_θ (7.1.21) появляется дополнительное апостериорное усреднение по неизвестным (случайным) параметрам:

$$M_\theta(\cdot)=\begin{cases}\int\ldots\int(\cdot)\,p(x_k,\eta_k,\mu,\mathbf{v}\,|\,y_0^{k-1},\ \theta=1)\,dx_k d\eta_k d\mu d\mathbf{v},\\ \int\ldots\int(\cdot)\,p(\eta_k,\ \mathbf{v}\,|\,y_0^{k-1},\ \theta=0)\,d\eta_k d\mathbf{v}.\end{cases} \tag{12.2.8}$$

При переходе в (7.1.20) с учетом (8) к случаю слабого детерминированного сигнала получим алгоритм, отличающийся от (7.2.10) тем, что декоррелятор (7.2.21) здесь имеет вид

$$\tilde{y}_k=y_k-\hat{\eta}_{oka}, \tag{12.2.9}$$

где

$$\hat{\eta}_{oka}=\int\ldots\int\eta_k p(\eta_k,\ \mathbf{v}\,|\,y_0^{k-1},\ \theta=0)\,d\eta_k d\mathbf{v}$$

— адаптивная среднеквадратическая оценка помехи. При этом декоррелятор также является адаптивным.

Если и плотность вероятностей $\rho_\varkappa(\xi_k)$ шума ξ_k, входящего в (7.1.14), зависит от неизвестных параметров $\varkappa$, то в (8) появляется дополнительное апостериорное усреднение по $\varkappa$, а в (7.1.20) плотность $\rho(\cdot)$ заменяется на условную плотность $\rho(\cdot|\varkappa)$.

12.2.2. Пример. Для упрощения моделирования алгоритмов (4), (5) целесообразно применять квазиоптимальные методы, как и при полной априорной информации (гл. 6). Но в некоторых задачах удается полу-

чить удобные для моделирования адаптивные алгоритмы без использования приближений гл. 6. Проведем синтез и анализ таких адаптивных алгоритмов на конкретном примере.

Предположим, что полезный сигнал $S(x_k)=x_k$ является марковским гауссовским процессом, переходная плотность вероятностей которого равна

$$\pi(x_{k+1}\,|\,x_k,\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}}\exp\left\{-\frac{\left[x_{k+1}-x_kR-\frac{\mu}{\gamma}(1-R)\right]^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}, \quad (12.2.10)$$

$$R=\exp(-\gamma|\tau|),\quad \tau=t_{k+1}-t_k,$$

зависит от неизвестного параметра μ (это, по существу, означает, что неизвестна величина постоянной составляющей сигнала). Шум предполагается гауссовским (4.3.4).

В данном примере апостериорное распределение будет гауссовским, если сделать вполне естественное предположение о гауссовском законе распределения (с неизвестными параметрами) вводимой случайной величины μ, при этом можно записать

$$w_k(x_k,\mu)=\frac{\sqrt{h_{1,k}h_{2,k}-h_{12,k}}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{h_{1,k}}{2}(x_k-m_{1,k})^2-\right.$$

$$\left.-h_{12,k}(x_k-m_{1,k})(\mu-m_{2,k})-\frac{h_{2,k}}{2}(\mu-m_{2,k})^2\right\}, \quad (12.2.11)$$

Подставляя (10), (11) и (4.3.4) в (4), (5), получим рекуррентные алгоритмы фильтрации и обнаружения, которые в отличие от общих соотношений (4), (5) нетрудно моделировать:

$$h_{1,k+1}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{h_{1,k}}{R^2+\sigma_1^2h_{1,k}},\qquad h_{12,k+1}=\frac{Rh_{12,k}^2-\nu h_{1,k}}{R^2+\sigma_1^2h_{1,k}},$$

$$h_{2,k+1}=h_{2,k}+\frac{\nu^2h_{1,k}-2\nu Rh_{12,k}-\sigma_1^2h_{12,k}^2}{R^2+\sigma_1^2h_{1,k}}, \quad (12.2.12)$$

$$m_{1,k+1}=\frac{a_{k+1}h_{2,k+1}-b_{k+1}h_{12,k+1}}{h_{1,k+1}h_{2,k+1}-h_{12,k+1}^2}, \quad (12.2.13)$$

$$m_{2,k+1}=\frac{b_{k+1}h_{1,k+1}-a_{k+1}h_{12,k+1}}{h_{1,k+1}h_{2,k+1}-h_{12,k+1}^2}, \quad (12.2.14)$$

$$\Lambda_{k+1}=\Lambda_k\sqrt{\frac{h_{1,k}h_{2,k}-h_{12,k}^2}{(h_{1,k+1}h_{2,k+1}-h_{12,k+1}^2)(R^2+\sigma_1^2h_{1,k})}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}a_{k+1}m_{1,k+1}+\frac{1}{2}b_{k+1}m_{2,k+1}-\frac{1}{2}a_km_{1,k}-\frac{1}{2}b_km_{2,k}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma_1^2(h_{1,k}m_{1,k}+h_{12,k}m_{2,k})^2}{2(R^2+\sigma_1^2h_{1,k})}\right\}. \quad (12.2.15)$$

Здесь для сокращения записи использованы обозначения:

$$\sigma_1^2=\sigma^2(1-R^2),\quad \nu=\frac{1-R}{\gamma},\quad a_{k+1}=\frac{y_{k+1}}{\sigma_0^2}+\frac{R(h_{1,k}m_{1,k}+h_{12,k}m_{2,k})}{R^2+\sigma_1^2h_{1,k}},$$

$$b_{k+1}=h_{12,k}m_{1,k}+h_{2,k}m_{2,k}-\frac{\nu R+\sigma_1^2h_{12,k}}{R^2+\sigma_1^2h_{1,k}}(h_{1,k}m_{1,k}+h_{12,k}m_{2,k})$$

(отметим, что при непрерывном времени алгоритмы (12)—(15) приобретут более компактный вид, см. п. 12.3.2).

На выходе рекуррентного фильтра (13) (в данном примере линейного) образуется адаптивная оценка $m_{1,k+1}$ сигнала x_{k+1}. При этом ее формирование связано с формированием оценки $m_{2,k+1}$ (12) неизвестного параметра μ. Выражения (12) определяют ошибки фильтрации неизвестного параметра и самого сигнала.

Вычисление ошибок по рекуррентным формулам (12) принципиальных трудностей не представляет. Однако в целях уменьшения объема вычислений и получения явных выражений для ошибок фильтрации, которые потребуются при исследовании сходимости алгоритмов, рассмотрим более частную задачу. Предположим, что сигнал x_k является некоррелированным (по-прежнему с неизвестным средним значением $\mathbf{M}x_k$). В соответствии с (10) в данном случае нужно положить $R=0$ и затем $\gamma=1$, при этом формулы (13), (14) приобретают более простой вид:

$$m_{1,k+1}=y_{k+1}\frac{K_{2,k}+\sigma^2}{K_{2,k}+\sigma^2+\sigma_0^2}+m_{2,k}\,\frac{\sigma_0^2}{K_{2,k}+\sigma^2+\sigma_0^2}, \qquad (12.2.16)$$

$$m_{2,k+1}=y_{k+1}\frac{K_{2,k}}{K_{2,k}+\sigma^2+\sigma_0^2}+m_{2,k}\,\frac{\sigma^2+\sigma_0^2}{K_{2,k}+\sigma^2+\sigma_0^2}, \qquad (12.2.17)$$

где $K_{2,k}=\dfrac{h_{1,k}}{h_{1,k}h_{2,k}-h_{12,k}^2}$ — апостериорная дисперсия величины μ — находится из (12):

$$K_{2,k}=K_{2,k-1}(\sigma^2+\sigma_0^2)/(K_{2,k-1}+\sigma^2+\sigma_0^2). \qquad (12.2.18)$$

Последняя формула определяет погрешность оценивания (на k-м шаге) неизвестного параметра μ. Величина $K_{1,k}=h_{2,k}/(h_{1,k}h_{2,k}-h_{12,k}^2)$, определяющая погрешность оценивания самого сигнала x_k, равна

$$K_{1,k}=\sigma_0^2(K_{2,k-1}+\sigma^2)/(K_{2,k-1}+\sigma^2+\sigma_0^2). \qquad (12.2.19)$$

Из рекуррентных соотношений (16)—(19) сразу следуют явные формулы для оценок и ошибок. Так, из (17), (18) получаем

$$m_{2,n}=\frac{1}{n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0}}\sum_{i=1}^{n}y_i+m_{2,0}\,\frac{\sigma^2+\sigma_0^2}{K_{2,0}}\,\frac{1}{n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0}}, \qquad (12.2.20)$$

$$K_{2,n}=\frac{1}{n/(\sigma^2+\sigma_0^2)+1/K_{2,0}}, \qquad (12.2.21)$$

где $m_{2,0}$ и $K_{2,0}$ — начальные условия. Обратим внимание на то, что эти начальные условия (их значения) неизвестны, так как неизвестны*) параметры априорного распределения случайной величины μ.

*) Отметим, что при известных начальных условиях, т. е. при строго байесовской постановке задачи, оценки (16), (17) и величины (19), (21) есть БСО сигнала x_{k+1}, БСО параметра μ и средние квадраты ошибок соответственно.

Обозначим истинные (неизвестные наблюдателю) значения параметра μ через μ_0, т. е. $\mathrm{M}x_k=\mu_0$ ($k=1, 2, \ldots$). При этом математическое ожидание и дисперсия оценки (20) имеют вид ($\theta=1$):

$$\mathrm{M}m_{2n}=\frac{n\mu_0}{n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0}}+\frac{m_{2,0}}{K_{2,0}}\frac{\sigma^2+\sigma_0^2}{n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0}}, \qquad (12.2.22)$$

$$\mathrm{D}m_{2,n}=\frac{n(\sigma^2+\sigma_0^2)}{[n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0}]^2}. \qquad (12.2.23)$$

Подставив (23) в неравенство Чебышева, получим

$$P\{|m_{2,n}-\mathrm{M}m_{2,n}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{n(\sigma^2+\sigma_0^2)}{\varepsilon^2(n+(\sigma^2+\sigma_0^2)/K_{2,0})^2}. \qquad (12.2.24)$$

Каково бы ни было значение $K_{2,0}$, правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$. Кроме того, независимо от выбора $m_{2,0}$ и $K_{2,0}$ (исключая $K_{2,0}=0$) согласно (22) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}m_{2,n}=\mu_0. \qquad (12.2.25)$$

В результате из (24), (25) следует, что независимо от выбора $m_{2,0}$ и $K_{2,0}$

$$m_{2,n}\xrightarrow{P}\mu_0 \qquad (12.2.26)$$

— оценка сходится (по вероятности) к истинному значению параметра.

Итак, при достаточно большом объеме наблюдаемых данных выбор начальных условий для синтезированных алгоритмов несуществен. При этом независимо от начальных условий погрешность оценивания (21) неизвестного параметра асимптотически стремится к нулю, сама оценка (17) сходится к искомому параметру, а оценка (16) и величина (19) сходятся к БСО сигнала и среднему квадрату ошибки оценивания при известном параметре μ. Это свидетельствует об эффективности излагаемого метода синтеза в условиях параметрической априорной неопределенности.

Относительно формирования отношения правдоподобия (15) отметим лишь следующее. При $\theta=0$ величина $m_{2,k}$, входящая в (15), становится псевдооценкой и соотношение (26), конечно, несправедливо. Если свернуть рекуррентный алгоритм (15) (при $R=0$) и положить $K_{2,0}=\infty$, то полученное выражение совпадает с небайесовским алгоритмом, получаемым при помощи обобщенного критерия отношения правдоподобия. Отсюда видны точки соприкосновения различных по своему существу методов.

В заключение подчеркнем, что синтезированные здесь адаптивные системы относятся к классу самонастраивающихся или самообучающихся систем.

12.3. АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ (НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ)

12.3.1. Общие алгоритмы. а) Вначале наблюдаемые данные определим выражением

$$y_t=\begin{cases} S(\mathbf{x}_t, t)+\xi_t, & \theta=1,\\ \xi_t, & \theta=0,\end{cases} \quad t\geqslant 0, \qquad (12.3.1)$$

где ξ_t — белый шум, $\{\mathbf{x}_t\}=\{x_{1t}, \ldots, x_{ut}\}$ — многомерный марковский диффузионный процесс. Характеризующие процесс $\{\mathbf{x}_t\}$ коэффициенты

переноса и диффузии

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\frac{x_{i,t+\Delta t}-x_{it}}{\Delta t}\,\middle|\,\mathrm{x}_t=\mathrm{x}\right]=a_i(\mathrm{x},\mu,t)\equiv a_i,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\frac{(x_{i,t+\Delta t}-x_{it})(x_{j,t+\Delta t}-x_{jt})}{\Delta t}\,\middle|\,\mathrm{x}_t=\mathrm{x}\right]= \qquad (12.3.2)$$

$$=b_{ij}(\mathrm{x},\varkappa,t)\equiv b_{ij}$$

зависят от параметров $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_l)$ и $\varkappa=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$, которые неизвестны наблюдателю.

Считая неизвестные параметры случайными величинами, дополним процесс $\{\mathrm{x}_t\}$ компонентами μ и $\varkappa$, образующими вырожденные марковские процессы с нулевыми коэффициентами переноса и диффузии. При этом придем к $(u+l+n)$-мерному процессу $\{\mathrm{x}_t, \mu, \varkappa\}$, который также является марковским. Полученный процесс характеризуется матрицами коэффициентов переноса и диффузии следующего вида:

$$A=\|a_1(\mathrm{x},\mu,t), \ldots, a_u(\mathrm{x},\mu,t), 0, \ldots, 0\|,$$

$$B=\left\|\begin{matrix} b_{11}(\mathrm{x},\varkappa,t), \ldots, & b_{1u}(\mathrm{x},\varkappa,t), & 0, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{u1}(\mathrm{x},\varkappa,t), \ldots, & b_{uu}(\mathrm{x},\varkappa,t), & 0, \ldots, 0 \\ 0, \quad , \ldots, & 0, & 0, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, \quad , \ldots, & 0, & 0, \ldots, 0 \end{matrix}\right\|. \qquad (12.3.3)$$

Существенно, что в результате проведенного расширения исходного процесса мы перешли от задачи с неполностью известными коэффициентами (2) к задаче с полностью известными коэффициентами переноса и диффузии (3). При этом полезный сигнал $S(\mathrm{x}_t, t)$ является функцией не всех, а лишь части компонент процесса $\{\mathrm{x}_t, \mu, \varkappa\}$.

Теперь можно воспользоваться результатами п. 5.2.3. Применяя их к данной задаче, получим уравнение нелинейной фильтрации, описывающее эволюцию АПВ $w_t=p(\mathrm{x}_t, \mu, \varkappa | y_0^t, \theta=1)$

$$\dot{w}_t=-\sum_{i=1}^{u}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i w_t+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{u}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}b_{ij}w_t+\frac{1}{N}\left\{S(\mathrm{x},t)\left[y_t-\frac{1}{2}S(\mathrm{x},t)\right]-\right.$$

$$\left.-\int\cdots\int S(\mathrm{x},t)\left[y_t-\frac{1}{2}S(\mathrm{x},t)\right]w_t d\mathrm{x}\,d\mu\,d\varkappa\right\}w_t \qquad (12.3.4)$$

и уравнение, описывающее логарифм отношения правдоподобия,

$$\dot{z}_t=\frac{1}{N}\int\cdots\int S(\mathrm{x},t)\left[y_t-\frac{1}{2}S(\mathrm{x},t)\right]w_t d\mathrm{x}\,d\mu\,d\varkappa. \qquad (12.3.5)$$

Симметризованные уравнения (4), (5) составляют основу для построения адаптивных алгоритмов нелинейной фильтрации и обнаружения при неполностью известных коэффициентах переноса и диффузии процесса $\{\mathrm{x}_t\}$. Используя (5.2.27), (5.2.28), нетрудно переписать полученные уравнения в форме Ито.

Относительно оптимальности полученных алгоритмов справедливы те же замечания, что и в случае дискретного времени (см. § 12.2). При

строго байесовской постановке задачи распределение вероятностей случайных величин μ и $\varkappa$ задано, так что можно записать начальное распределение $w_0(\mathbf{x}_0, \mu, \varkappa)$ — начальное условие для уравнения (4). В этом случае оптимальность алгоритмов понимается в обычном байесовском смысле. В частично байесовской задаче (распределения величин μ, $\varkappa$ неизвестны полностью или частично) начальное условие w_0 выбирается более или менее произвольно, при этом в силу свойства сходимости АПВ при $t \to \infty$, аналогичного случаю дискретного времени, оптимальность рассматриваемых алгоритмов понимается в асимптотическом смысле.

Излагаемый метод решения задач приема сигналов при неполной априорной информации распространяется и на более сложные случаи, когда мешающий процесс, кроме белого шума, содержит коррелированную, в общем случае негауссовскую помеху, причем параметрически априорно неопределенную. Эти задачи также решаются путем расширения исходных процессов с последующим применением результатов п. 5.2.3. Общие уравнения по данной проблеме приведены в [97].

б) Остановимся подробнее на уравнении для ЛП (5), при этом перепишем его в виде

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N}\widehat{S}_{ta}y_t - \frac{1}{2N}\widehat{S^2_{ta}}, \tag{12.3.5'}$$

где

$$\begin{gathered}\widehat{S}_{ta} = \int\ldots\int S(\mathbf{x}, t)\,w_t(\mathbf{x}, \mu, \varkappa)\,d\mathbf{x}\,d\mu d\varkappa = \mathrm{M}_a[S(\mathbf{x}_t, t)\,|\,y_0{}^t, \theta = 1], \\ \widehat{S^2_{ta}} = \mathrm{M}_a[S^2(\mathbf{x}_t, t)\,|\,y_0^t, \theta = 1].\end{gathered} \tag{12.3.6}$$

Индекс a отмечает принадлежность выражений к случаю априорной неопределенности — адаптивному случаю. При строго байесовской задаче адаптивная оценка $\hat{S}_{ta}$ есть БСО сигнала $S(\mathbf{x}_t, t)$. Для частично байесовской задачи оптимальность адаптивной оценки $\hat{S}_{ta}$ следует понимать в асимптотическом смысле, так как при $t \to \infty$ независимо от выбора априорных распределений параметров μ, $\varkappa$ имеем (при $\theta = 1$)

$$\widehat{S}_{ta} \to \widehat{S}_t = \int\ldots\int S(\mathbf{x}, t)\,w_t(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = M[S(\mathbf{x}_t, t)|y_0{}^t, \theta = 1],$$

где $w_t(\mathbf{x})$ — АПВ процесса $\mathbf{x}_t$ при известных μ, $\varkappa$. Для $\theta = 0$ функционалы $\hat{S}_{ta}$, $\hat{S}_t$ являются псевдооценками, при этом $\widehat{S}_{ta} \not\to \widehat{S}_t$.

Отметим, что в случае известных параметров μ, $\varkappa$ уравнение для ЛП имеет вид (4.2.28):

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N}\widehat{S}_t y_t - \frac{1}{2N}\widehat{S^2_t}. \tag{12.3.6'}$$

Сравнивая (5′) с (6′), видим, что эти оценочно-корреляционные алгоритмы обнаружения по форме совпадают (для любых t), однако $\hat{S}_{at} \neq \hat{S}_t$. Последнее объясняется тем, что уравнение нелинейной фильтрации (4) отличается от соответствующего уравнения (ср. с (4.2.27), (4.2.30), (4.2.31)) при полной априорной информации.

Таким образом, структура оценочно-корреляционного алгоритма обнаружения инвариантна относительно параметрической априорной неопределенности. В то же время алгоритм фильтрации таким свойст-

вом (при конечном t) не обладает. Это приводит к тому, что блок обнаружения в схеме совместного обнаружения и фильтрации остается прежним (как и для известных μ, $\varkappa$), а блок оценки изменяется (становится сложнее).

Указанным свойством инвариантности обладают также все оценочно-корреляционные и оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы обнаружения при произвольных сигналах и помехах (гл. 7). Вид этих алгоритмов остается прежним (как для симметризованной записи, так и для формы Ито); изменения же в них связаны с заменой байесовских среднеквадратических оценок сигналов и помех (при известных μ, $\varkappa$) на адаптивные байесовские оценки, которые определяются подобно (6). Отметим, в частности, что оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы, содержащие обеляющие фильтры (см. например (7.1.27)), по-прежнему имеют такие фильтры, однако последние станут адаптивными. Так вместо (7.1.28) имеем

$$\tilde{y}_t = y_t - \hat{\eta}_{ota}, \tag{12.3.7}$$

где адаптивная оценка помехи

$$\hat{\eta}_{ota} = \int \dots \int \eta p(\eta, \varkappa \mid y_0^t,\ \theta = 0)\, d\eta\, d\varkappa = M_a [\eta_t \mid y_0^t,\ \theta = 0].$$

Адаптивному обеляющему фильтру (7) в варианте дискретного времени соответствует адаптивный декоррелятор (12.2.9).

в) Структуру алгоритма адаптивной нелинейной фильтрации, определяемого уравнением (4) можно представить по-иному, если учесть, что

$$w_t \equiv p(\mathbf{x}_t, \mu, \varkappa \mid y_0^t, \theta = 1) = p(\mathbf{x}_t \mid y_0^t, \mu, \varkappa, \theta = 1)\, p(\mu, \varkappa \mid y_0^t, \theta = 1).$$

Обозначим

$$w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa) = p(\mathbf{x}_t \mid y_0^t, \mu, \varkappa, \theta = 1),$$
$$w_t(\mu, \varkappa) = p(\mu, \varkappa \mid y_0^t, \theta = 1).$$

Уравнение для АПВ $w_t(\mathbf{x}|\mu, \varkappa)$ есть не что иное, как уравнение оптимальной нелинейной фильтрации при известных параметрах μ, $\varkappa$:

$$\dot{w}_t(\mathbf{x}|\mu, \varkappa) = L_{pr} w_t(\mathbf{x}|\mu, \varkappa) + \frac{1}{N} \Big\{ S(\mathbf{x}, t)\Big[y_t - \frac{1}{2} S(\mathbf{x}, t)\Big] - \\ - \int \dots \int S(\mathbf{x}, t)\Big[y_t - \frac{1}{2} S(\mathbf{x}, t)\Big] w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, d\mathbf{x} \Big\} w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa) \tag{12.3.8}$$

(априорный оператор L_{pr} — тот же, что и в (4)).

Используя равенство*)

$$\dot{w}_t = w_t(\mu, \varkappa)\, \dot{w}_t(\mathbf{x}|\mu, \varkappa) + w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, \dot{w}_t(\mu, \varkappa), \tag{12.3.8$'$}$$

из (4), (8) получаем уравнение для АПВ неизвестных параметров:

$$\dot{w}_t(\mu, \varkappa) = \frac{w_t(\mu, \varkappa)}{N} \Big\{ \int \dots \int S(\mathbf{x}, t)\Big[y_t - \frac{1}{2} S(\mathbf{x}, t)\Big] w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, d\mathbf{x} - \\ - \int \dots \int S(\mathbf{x}, t)\Big[y_t - \frac{1}{2} S(\mathbf{x}, t)\Big] w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, w_t(\mathbf{x}, \mu)\, d\mathbf{x}\, d\mu\, d\varkappa \Big\}. \tag{12.3.9}$$

*) Дифференцируем по t согласно обычному правилу, так как здесь рассматриваются симметризованные уравнения.

Если за основу построения адаптивного алгоритма взять (8) и (9), то придем к системе, состоящей из двух взаимосвязанных каналов: один — обычное устройство нелинейной фильтрации при полной априорной информации (уравнение (8)), другой — канал адаптации, осуществляющий согласно (9) фильтрацию неизвестных параметров*).

В том случае, когда уравнения фильтрации записаны в форме Ито, вместо (8′) имеем

$$d^*w_t = w_t(\mu, \varkappa)\, d^*w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa) + w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, d^*w_t(\mu, \varkappa) + \\ + M\left[d^*w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, d^*w_t(\mu, \varkappa) \mid \mathbf{x}_t, y_0^t, \theta = 1\right] dt.$$

Используя вместо симметризованных уравнений (4), (8) соответствующие уравнения в форме Ито, получим уравнение

$$d^*w_t(\mu, \varkappa) = \frac{w_t(\mu, \varkappa)}{N}\left[\int \ldots \int S(\mathbf{x}, t)\, w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, d\mathbf{x} - \right.$$

$$\left. - \int \ldots \int S(\mathbf{x}, t)\, w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, w_t(\mu, \varkappa)\, d\mathbf{x}\, d\mu\, d\varkappa\right]\left[d^*\overline{y}_t - \right.$$

$$\left. - \left(\int \ldots \int S(\mathbf{x}, t)\, w_t(\mathbf{x} \mid \mu, \varkappa)\, w_t(\mu, \varkappa)\, d\mathbf{x}\, d\mu\, d\varkappa\right) dt\right],$$

— определяющее структуру канала адаптации $\left(\overline{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau\right)$.

г) Остановимся кратко на задаче экстраполяции. При полной априорной информации (т. е. при известных μ и $\varkappa$) уравнение для АПВ в задаче экстраполяции есть уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (11.3.3), начальным условием для которого является решение уравнения нелинейной фильтрации (4.2.24). Аналогичное положение сохраняется и здесь с той разницей, что уравнения необходимо записать для расширенного процесса $\{\mathbf{x}_t, \mu, \varkappa\}$.

При этом уравнение для АПВ $w_{t\tau} = p(\mathbf{x}_\tau, \mu, \varkappa, \tau | y_0^t, \theta = 1)$ $(\tau \geqslant t)$ совпадает по форме с прежним уравнением экстраполяции в силу нулевых коэффициентов переноса и диффузии компонент $\{\mu, \varkappa\}$. Однако решения этих уравнений различны — из-за различных начальных условий. Если в задаче с полной априорной информацией при экстраполяции многомерного процесса в качестве начального условия берется, например, решение уравнения (4.2.27), (4.2.31), то здесь начальное условие для многомерного варианта уравнения (11.3.8) представляет собой решение уравнения (4) $(w_{tt} = w_t)$. Указанное обстоятельство приводит к тому, что несмотря на различие экстраполяционных оценок при полной и неполной априорной информации, структура этих оценок (структура блока экстраполяции, построенного на основе (11.3.3)) оказывается одинаковой — инвариантной относительно параметрической априорной неопределенности. (Рассматриваемая задача экстраполяции несколько подробнее освещена в [98].)

д) Для упрощения моделирования перейдем от уравнений (4), (5) к приближенным алгоритмам, используя метод гауссовского приближе-

---

*) Подобная задача рассматривалась в [124, 73].

ния. В этом случае апостериорное распределение аппроксимируется гауссовским законом:

$$w_t=(2\pi)^{-(u+l+n)/2}\det{}^{-1/2}\|K_{ij}\|\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{u+l+n}h_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right\}, \qquad (12.3.10)$$

$$\|K_{ij}\|=\|h_{ij}\|^{-1}. \qquad (12.3.11)$$

Здесь обозначено: $x_{u+i}\equiv\mu_i$, $1\leqslant i\leqslant l$, $x_{u+l+i}\equiv\varkappa_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Из (4), (5), (10), (11) находим

$$\dot K_{ij}=\sum_{q=1}^{u+l}K_{jq}\frac{\partial a_i}{\partial x_q}+\sum_{q=1}^{u+l}K_{iq}\frac{\partial a_j}{\partial x_q}+b_{ij}+\frac{1}{N}(y_t-S)\sum_{q,p=1}^{u}K_{iq}K_{jp}\frac{\partial^2 S}{\partial x_q\partial x_p}-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{q,p=1}^{u}K_{iq}K_{jp}\frac{\partial S}{\partial x_q}\frac{\partial S}{\partial x_p},\quad i,j=1,\ldots,u+l+n, \qquad (12.3.12)$$

$$\dot m_i=a_i+\frac{1}{N}(y_t-S)\sum_{q=1}^{u}K_{iq}\frac{\partial S}{\partial x_q}, \qquad (12.3.13)$$

$$\dot z=\frac{y_t}{N}\left(S+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{u}K_{ij}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\right)-$$

$$-\frac{1}{2N}\left[S^2+\sum_{i,j=1}^{u}K_{ij}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}+S\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right], \qquad (12.3.14)$$

где $a_i=a_i(m_1,\ldots,m_{u+l},t)$, $b_{ij}=b_{ij}(m_1,\ldots,m_u,m_{u+l+1},\ldots,m_{u+l+n},t)$, $S=$ $=S(m_1,\ldots,m_u,t)$. (Для сокращения записи индекс t у компонент K_{ij}, h_{ij}, m_i опущен.)

Уравнения (12)—(14) дают алгоритмы нелинейного (и линейного) оценивания и обнаружения при параметрической априорной неопределенности распределения полезного сигнала. Они являются асимптотически оптимальными при условии большой апостериорной точности (как и в п. 6.1.2). Это условие в рассматриваемых задачах смыкается с условием длительного наблюдения, которое необходимо для асимптотической оптимальности алгоритмов при частично байесовской постановке задач (когда начальные условия для (12)—(13) являются неопределенными). Как и следовало ожидать, уравнение (14) совпадает с уравнением для ЛП в гауссовском приближении при известных μ, $\varkappa$.

е) Переход от оптимальных к квазиоптимальным адаптивным алгоритмам можно осуществить, конечно, не только при помощи гауссовской аппроксимации. Возможно применение и других приближенных методов, о которых говорилось в гл. 6. Заслуживает внимания также

метод гауссовских сумм, когда АПВ аппроксимируется выражением*)

$$w_t = \sum_{r_1=1}^{M_1} \dots \sum_{r_p=1}^{M_p} \alpha_{r_1 r_2 \dots r_p} (2\pi)^{-p/2} \det{}^{-1/2} \| K_{ij}(r_i, r_j) \| \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} h_{ij}(r_i, r_j) [x_i - m_i(r_i)] [x_j - m_j(r_j)]\right\}, \quad (12.13.14')$$

где p — размерность вектора $\mathbf{x}$ (применительно к предыдущей задаче $p=u+l+n$; M_i, $i=1, \dots, p$ — число парциальных гауссовских законов, используемых для аппроксимации; $\|K_{ij}(r_i, r_j)\| = \|h_{ij}(r_i, r_j)\|^{-1}$ — матрицы апостериорных дисперсий порядка $(p\times p)$ (в общем случае для каждой пары r_i, r_j, i, $j=1, \dots, p$ имеется своя матрица); $m_i(r_i)$, $i=1, \dots, p$ — апостериорные средние парциальных законов; $\alpha_{r_1 r_2 \dots r_p}$ — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию

$$\sum_{r_1=1}^{M_1} \dots \sum_{r_p=1}^{M_p} \alpha_{r_1 r_2 \dots r_p} = 1.$$

При $M_1=M_2=\dots=M_p=1$ имеем $\alpha_{11\dots1}=1$ и аппроксимация (14′) переходит в гауссовскую (10).

Соотношение (14′) позволяет с необходимой степенью точности аппроксимировать широкий класс негауссовских апостериорных распределений, сохраняя при этом вычислительные преимущества, свойственные гауссовской аппроксимации.

Используя (14′) и, например, (4), нетрудно получить дифференциальные уравнения для параметров $m_i(r_i)$, $K_{ij}(r_i, r_j)$, $\alpha_{r_1 r_2 \dots r_p}$ (методика получения — та же, что и при отыскании уравнений гауссовского приближения, см. п. 6.1.2). Уравнения для указанных параметров дают алгоритмы адаптивной нелинейной фильтрации в рассматриваемом негауссовском приближении. Получаемая система фильтрации является многоканальной; каналы взаимосвязаны, причем каждый из них построен на основе гауссовского приближения. Отметим, что такая многоканальная система снимает трудность, иногда свойственную алгоритмам гауссовского приближения, которая связана с началом работы алгоритмов (с их вхождением в «синхронизм»). Но при этом значительно усложняется система фильтрации.

ж) Качество фильтрации и экстраполяции сигналов характеризуется соответствующими величинами апостериорных дисперсий. В задаче фильтрации при гауссовском приближении они определяются уравнениями (12).

Качество работы приемника обнаружения, включающего в себя блок фильтрации, характеризуется вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода α, β. Подобно случаю с полной априорной информацией (гл. 8) для них можно ввести апостериорные вероятности ошибок и записать рекуррентные соотношения и дифференциальные уравнения диффузионного типа. Решения этих уравнений, взятые в начальной точке, дадут вероятности ошибок 1-го и 2-го рода для рассматриваемых здесь задач.

*) Одномерный вариант подобной аппроксимации рассматривался в [165].

Общие методы анализа обнаружителей, по сути дела, остаются прежними. Однако вычислительные трудности, которые возникают в конкретных задачах при расчете характеристик обнаружения, в случае параметрической априорной неопределенности существенно возрастают, так как увеличивается размерность уравнений.

12.3.2. Примеры. а) Пусть $S(x_t, t) = x_t$, причем

$$\dot{x}_t = \mu - \gamma x_t + \zeta_t, \quad M\zeta_t = 0, \qquad M\,\zeta_t\zeta_{t+\tau} = \varkappa\delta(\tau). \tag{12.3.15}$$

Предположим, что значения параметров γ и $\varkappa$ марковского гауссовского сигнала x_t известны, а значение параметра μ неизвестно. Таким образом, для расширенного процесса $\{x_t, \mu\}$ имеем

$$a_1(x, \mu) = \mu - \gamma x, \quad a_2 = 0, \quad b_{11} = \varkappa, \quad b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0.$$

Конкретизируя (12)—(14), получим

$$\dot{K}_{11} = \varkappa - 2\gamma K_{11} - 2K_{12} - \frac{1}{N} K_{11}^2, \qquad \dot{K}_{12} = -\gamma K_{12} + K_{22} - \frac{1}{N} K_{11}K_{12}, \quad \dot{K}_{22} = -\frac{1}{N} K_{12}^2, \tag{12.3.16}$$

$$\dot{m}_1 = m_2 - \gamma m_1 + \frac{1}{N}(y_t - m_1) K_{11}, \quad \dot{m}_2 = \frac{1}{N}(y_t - m_1) K_{12}, \tag{12.3.17}$$

$$\dot{z} = \frac{1}{N} y_t m_1 - \frac{1}{2N} m^2{}_1 - \frac{1}{2N} K_{11}. \tag{12.3.18}$$

К уравнениям (16)—(18) можно прийти также другим способом — путем предельного перехода в рекуррентных соотношениях (12.2.12)—(12.2.15) с последующей заменой согласно (11).

Апостериорная дисперсия $K_{11}(t)$, которая в данном примере является средним квадратом ошибки фильтрации в белом шуме сигнала x_t при неизвестной величине параметра μ, определяется системой нелинейных уравнений (16). Так как $K_{12}(t) \geqslant 0$, то из (16) следует, что $K_{11} \geqslant K(t)$, где $K(t)$ — средний квадрат ошибки оптимальной фильтрации x_t при известном μ:

$$\dot{K} = \varkappa - 2\gamma K - \frac{1}{N} K^2.$$

Указанное неравенство вполне понятно с физической точки зрения. Знак равенства достигается в стационарном случае при $\dot{K}_{22} = \dot{K}_{12} = 0$, когда согласно (16) имеем $K_{22} = K_{12} = 0$ (точная фильтрация параметра μ). По мере приближения к стационарному состоянию ($t \to \infty$) величина $K_{11}(t)$ стремится к константе

$$K_{11} = \gamma N\left(\sqrt{1 + \frac{\varkappa}{\gamma^2 N}} - 1\right) = K, \tag{12.3.19}$$

ошибка оценивания $\sqrt{K_{22}(t)}$ неизвестного параметра стремится к нулю, сама оценка $m_2(t)$ сходится (при $\theta = 1$) к истинному значению параметра μ, а оценка $m_1(t)$ — к оптимально отфильтрованному сигналу в случае полной априорной информации.

При помощи (12)—(14) нетрудно также записать адаптивные алгоритмы обработки сигнала x_t при неизвестных параметрах γ и $\varkappa$.

б) Рассмотрим прием радиосигнала с блуждающей фазой

$$S = A_0 \sin(\omega_0 t + x_t), \quad \dot{x}_t = \zeta_t, \qquad (12.3.20)$$
$$M\zeta_t \zeta_{t+\tau} = \varkappa \delta(\tau)$$

при неизвестной интенсивности блужданий $\varkappa$ (A_0 и ω_0 предполагаются известными). Конкретизируя (12)—(14), находим уравнения адаптивного приема для рассматриваемой задачи (вибрационными членами с удвоенной частотой пренебрегаем)

$$\dot{K}_{11} = -y_t \frac{K^2_{11}}{N} A_0 \sin(\omega_0 t + m_1) + m_2,$$
$$\dot{K}_{12} = -y_t \frac{K_{11}K_{12}}{N} A_0 \sin(\omega_0 t + m_1), \qquad (12.3.21)$$

$$\dot{m}_2 = y_t \frac{K_{12}}{N} A_0 \cos(\omega_0 t + m_1),$$
$$\dot{m}_1 = y_t \frac{K_{11}}{N} A_0 \cos(\omega_0 t + m_1), \qquad (12.3.22)$$

$$\dot{z}_t = \frac{y_t}{N}\left(1 - \frac{K_{11}}{2}\right) A_0 \sin(\omega_0 t + m_1). \qquad (12.3.23)$$

Структурная схема синтезированного приемника показана на рис. 12.1.

Приведенная схема отличается от полученного ранее приемника при известном значении $\varkappa$ (см. рис. 6.1) наличием блока адаптивной автоматической регулировки усиления (ААРУ), схема которого определяется уравнениями (21). (Полная структурная схема, моделирующая (21)—(23), приведена в [97].) Вообще говоря, и при известном значении $\varkappa$ в задаче п. 6.2.1, как отмечалось, следовало бы ввести блок автоматической регулировки усиления (АРУ), описываемый уравнением (6.22) (при $\gamma = 0$). Однако между задачей п. 6.2.1 и рассматриваемой здесь имеется принципиальное различие. Если в п. 6.2.1 можно было упростить схему, перейдя от переменного коэффициента усиления к постоянному, используя формулу (6.2.5), то здесь этого сделать нельзя, так как значение параметра $\varkappa$, входящего в (6.2.5), неизвестно.

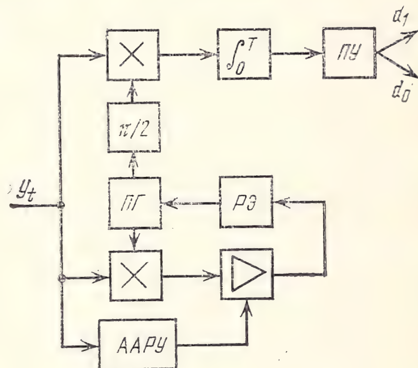


Рис. 12.1

Уравнения (21), (22) определяют схему адаптивной фазовой автоподстройки частоты в рассматриваемой задаче. При возрастании времени наблюдения ($t \to \infty$) согласно (21) $K_{12}(t) \to 0$, при этом оценка $m_2(t)$ стремится к некоторой постоянной величине — измеренному значению параметра $\varkappa$ (при $\theta = 1$). В результате цепочки формирования K_{12} и m_2, по сути дела, отключаются и синтезированная здесь схема фильтрации упрощается — переходит (самонастраивается) в схему ФАП, определяемую уравнениями (6.2.3) и (6.2.2) ($\gamma = 0$, $1/h_t = K_t$).

Конкретизация уравнений фильтрации (12), (13) дает разнообразные варианты адаптивных ФАП для различных моделей фазовых или частотных флюктуаций при неизвестных параметрах. При этом адапта-

ция будет сводиться не только к подстройке коэффициента усиления. При других моделях параметра сигнала, например в случае (6.2.7), будет адаптироваться и фильтр (при неизвестном γ), который дает теория.

Что касается блока обнаружения, структура которого определяется уравнением (23), то он остается прежним (ср. с (6.2.4)). Аналогичная ситуация имеет место и в предыдущем примере (ср. (18) с (4.3.15)). Это является следствием выявленного выше общего свойства инвариантности уравнения для ЛП относительно параметрической априорной неопределенности.

12.4. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕАДАПТИВНОГО ПРИЕМА

12.4.1. Алгоритмы. Оптимизация приема сигналов на фоне помех в условиях априорной неопределенности приводит к алгоритмам более сложным, чем при полной априорной информации, и это вполне естественно. Так, например, рассмотренная в § 12.2 и 12.3 процедура оптимизации связана с увеличением числа моделируемых уравнений. Последнее обусловлено необходимостью оценивать неизвестные параметры принимаемого сигнала. (Отметим, что задача оценивания неизвестных параметров нами априори не ставилась; она возникала естественным образом как следствие байесовского подхода и введения расширенного марковского процесса.)

Усложнение синтезируемых алгоритмов на практике может иногда приводить к нежелательным последствиям. Дело в том, что в реальных схемах значительную роль играют всевозможные аппаратурные ошибки, обусловленные неидеальностью технических средств; в техническом варианте сложной оптимальной системы они могут «съесть» с трудом добытую оптимальность. В результате на практике иногда заведомо неоптимальная (но простая) система будет работать с меньшими ошибками, чем реализованная при помощи существующих неидеальных технических средств теоретически оптимальная схема.

В сложной схеме более остро стоит вопрос о надежности. Кроме того, изготовление схемы в соответствии со сложным алгоритмом само по себе представляет сложную задачу, при этом определенную роль играет и экономический фактор.

Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о целесообразности синтеза алгоритмов при ограничении на их сложность. Подобные задачи можно решать, например, в рамках математико-эвристического синтеза, см. [101] и [102, гл. 8]. Не останавливаясь здесь на методологических проблемах и конкретных задачах этого синтеза, рассмотрим далее один класс неадаптивных алгоритмов ограниченной сложности.

Пусть, например, требуется выделить из шума стохастический сигнал x_t, и пусть распределение вероятности наблюдаемого процесса зависит от неизвестного параметра μ. Предположим, что имеются частичные априорные сведения об этом параметре, согласно которым известен диапазон возможных значений μ:

$$a \leqslant \mu \leqslant b. \tag{12.4.1}$$

Один из способов построения простого алгоритма оценивания в условиях априорной неопределенности состоит в следующем. Берется

алгоритм оптимального оценивания при известном параметре μ, а затем вместо этого параметра (который на самом деле неизвестен) подставляется значение $\tilde{\mu}\in[a, b]$. (В качестве $\tilde{\mu}$ целесообразно взять, например, точку $\tilde{\mu}=(a+b)/2$). В результате получаем неоптимальный неадаптивный алгоритм, что является, конечно, его недостатком. Однако этот алгоритм обладает и достоинством по сравнению, например, с адаптивным байесовским алгоритмом: сложность указанного неоптимального алгоритма не возросла (осталась той же, что и для оптимального алгоритма при полной априорной информации).

Очевидно, чем меньше априорная неопределенность, т. е. чем уже диапазон (1), тем выше качество неоптимальной оценки. В пределе при $a\to b$ неоптимальная оценка переходит в оптимальную.

Обратимся к задаче (12.3.1), когда коэффициенты переноса и диффузии (12.3.2) процесса $\mathbf{x}_t$ зависят от неизвестных параметров μ, $\varkappa$. Адаптивные алгоритмы гауссовского приближения для этой задачи даются формулами (12.3.12)—(12.3.14) Рассмотрим теперь неоптимальный алгоритм, получающийся из алгоритма гауссовского приближения для случая известных параметров μ, $\varkappa$ заменой последних некоторыми значениями $\tilde{\mu}$, $\tilde{\varkappa}$, выбранными, быть может, с учетом частичных априорных сведений. Уравнения неоптимальной фильтрации в этом случае имеют вид:

$$\dot{K}_{ij}=\sum_{q=1}^{u} K_{iq}\frac{\partial a_i}{\partial x_q}+\sum_{q=1}^{u} K_{jq}\frac{\partial a_j}{\partial x_q}+b_{ij}+\frac{1}{N}(y_t-S)\sum_{q,p=1}^{u} K_{iq}K_{ip}\frac{\partial^2 S}{\partial x_q\partial x_p}-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{q,\,p=1}^{u} K_{iq}K_{jp}\frac{\partial S}{\partial x_q}\frac{\partial S}{\partial x_p}, \tag{12.4.2}$$

$$\dot{m}_i=a_i+\frac{1}{N}(y_t-S)\sum_{q=1}^{u} K_{iq}\frac{\partial S}{\partial x_q}, \quad i, j=1, \ldots, u, \tag{12.4.3}$$

где $a_i=a_i(m_1, \ldots, m_u, \tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_l, t)$,

$b_{ij}=b_{ij}(m_1, \ldots, m_u, \tilde{\varkappa}_1, \ldots, \tilde{\varkappa}_n, t)$,

$S=S(m_1, \ldots, m_u, t)$

(если параметры $\tilde{\mu}$, $\tilde{\varkappa}$ совпадают с истинными, то уравнения (2), (3) дают алгоритмы нелинейной фильтрации в гауссовском приближении, являющиеся асимптотически оптимальными, см. п. 6.1.2).

Сравнивая адаптивный алгоритм (12.3.12), (12.3.13) с неадаптивным (2), (3), видим, что порядок систем уравнений, определяющих сложность алгоритмов фильтрации, существенно снизился.

12.4.2. Вычисление ошибок [98]. При рассмотрении того или иного неоптимального алгоритма естественным образом встает вопрос о качестве его работы.

Качество асимптотически оптимальной адаптивной фильтрации сигналов определяется значениями апостериорных дисперсий, отыскиваемых при помощи (12.3.12). Однако в случае неоптимальной обработки (2), (3) подобный метод непригоден. Здесь необходим прямой метод вычисления ошибок (см. п. 8.1.2).

Рассмотрим два примера.

1. Пусть наблюдается $y_t = x_t + \xi_t$, где ξ_t — белый шум, а сигнал x_t описывается (12.3.15). Будем искать средний квадрат ошибки фильтрации, исходя из его определения

$$D_t = \mathbf{M}(x_t - \tilde{m}_t)^2 \qquad (12.4.4)$$

и выбранного алгоритма $\tilde{m}_t$. Для случая, когда параметры μ, γ и $\varkappa$ в (12.3.15) неизвестны, неадаптивный алгоритм фильтрации согласно (2), (3) задается уравнениями

$$\dot{\tilde{m}}_t = (-\tilde{\gamma} + \tilde{K}_t/N)\tilde{m}_t + (\tilde{K}_t/N)\, y_t + \tilde{\mu}, \qquad (12.4.5)$$

$$\dot{\tilde{K}}_\tau = -\tilde{K}^2_\tau/N - 2\tilde{\gamma}\tilde{K}_\tau + \tilde{\varkappa}. \qquad (12.4.6)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &K_{1\tau} = \mathbf{M}(x_\tau - \tilde{m}_\tau), \quad K_{2\tau} = \mathbf{M}[x_\tau(x_\tau - \tilde{m}_\tau)], \\ &K_{3\tau} = \mathbf{M}x_\tau, \quad K_{4\tau} = \mathbf{M}x_\tau^2. \end{aligned} \qquad (12.4.7)$$

Продифференцируем обе части равенства (4) по t. Переставляя операции математического ожидания и дифференцирования и учитывая (12.3.15), (5), получим уравнение для D_τ, в которое войдут величины (7). Для последних аналогичным образом находятся свои уравнения. При выводе необходимо учесть следующие легко доказываемые соотношения:

$$\mathbf{M}x_\tau\zeta_\tau = \varkappa/2, \quad \mathbf{M}\tilde{m}_\tau\xi_\tau = \tilde{K}_\tau/2, \quad \mathbf{M}\tilde{m}_\tau\zeta_\tau = 0, \qquad (12.4.8)$$

а также $\mathbf{M}x_\tau\xi_\tau = 0$, поскольку сигнал и шум предполагаются статистически независимыми.

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\dot{D}_\tau = -2\left(\tilde{\gamma} + \frac{\tilde{K}_\tau}{N}\right)D_\tau + 2(\mu - \tilde{\mu})K_{1\tau} - 2(\gamma - \tilde{\gamma})K_{2\tau} + \frac{\tilde{K}_\tau^2}{N} + \varkappa, \\ &\dot{K}_{1\tau} = -\left(\tilde{\gamma} + \frac{\tilde{K}_\tau}{N}\right)K_{1\tau} - (\gamma - \tilde{\gamma})K_{3\tau} + (\mu - \tilde{\mu}), \\ &\dot{K}_{2\tau} = \mu K_{1\tau} - \left(\gamma + \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{K}_\tau}{N}\right)K_{2\tau} + (\mu - \tilde{\mu})K_{3\tau} - (\gamma - \tilde{\gamma})K_{4\tau} + \varkappa, \\ &\dot{K}_{3\tau} = -\gamma K_{3\tau} + \mu, \quad \dot{K}_{4\tau} = 2\mu K_{3\tau} - 2\gamma K_{4\tau} + \varkappa, \end{aligned} \qquad (12.4.9)$$

где $\tilde{K}_\tau$ находится из (6).

Система линейных дифференциальных уравнений (9) определяет средний квадрат ошибки D_τ неадаптивной фильтрации. Решение в стационарном случае ($\dot{D}_\tau = \dot{K}_{i\tau} = \dot{\tilde{K}}_\tau = 0$) имеет вид

$$D = N\tilde{\gamma}(\tilde{\nu} - 1) + \frac{(\mu\tilde{\gamma} - \tilde{\mu}\gamma)^2}{\gamma^2\tilde{\gamma}^2\tilde{\nu}^2} - \frac{\varkappa(\gamma^2 - \tilde{\gamma}^2)}{2\gamma\tilde{\gamma}\tilde{\nu}(\gamma + \tilde{\gamma}\tilde{\nu})} + \frac{\varkappa - \tilde{\varkappa}}{2\tilde{\gamma}\tilde{\nu}}, \qquad (12.4.10)$$

$$\tilde{\nu} = \sqrt{1 + \frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{\gamma}^2 N}}.$$

Положив в этой формуле $\tilde{\mu} = \mu$, $\tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\varkappa} = \varkappa$, получим

$$D = \gamma N(\sqrt{1 + \varkappa/\gamma^2 N} - 1) = K, \qquad (12.4.11)$$

где K — стационарное значение среднего квадрата ошибки оптимальной фильтрации при полной априорной информации. Как и следовало ожидать, выражение для K (11) совпало с соотношением (12.3.19), полученным иным методом.

Из (10) легко найти средние квадраты ошибок неадаптивной фильтрации для ряда случаев, когда некоторые из параметров (12.3.15) известны. Так, например, при известных γ, $\varkappa$ и неизвестном μ, положив в (10) $\tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\varkappa} = \varkappa$, получаем простое выражение

$$D = K + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{\gamma^2(1 + \varkappa/\gamma^2 N)}. \qquad (12.4.12)$$

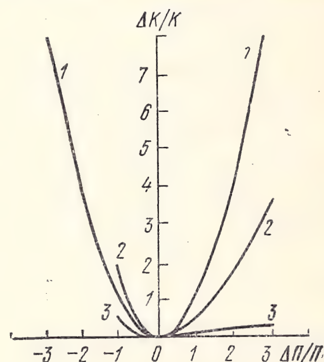


Рис. 12.2

Из (12) непосредственно видно, как повышается качество фильтрации при адаптивной асимптотически оптимальной обработке при неизвестном μ по сравнению с неадаптивной в стационарном случае. При этом следует учесть, что стационарное значение среднего квадрата ошибки адаптивной фильтрации в данном примере равно K (12.3.19). Таким образом, второе слагаемое в (12) есть «плата» за применение более простой неадаптивной обработки. Если неизвестное значение μ «угадано» (т. е. если при выборе $\tilde{\mu}$ оказалось, что $\tilde{\mu} = \mu$), то эта плата равна нулю. Конечно, рассчитывать на такую удачу не приходится; в целом ряде случаев дополнительная ошибка ($D - K$) может быть недопустимо велика (в зависимости от разности $\mu - \tilde{\mu}$). Во избежание подобных случаев следует использовать адаптивный алгоритм фильтрации (12.3.16), (12.3.17). Однако, если имеются частичные априорные сведения, позволяющие выбрать величину неизвестного параметра в некоторой окрестности его истинного значения, при которой средний квадрат ошибки фильтрации D не превысит заданной величины, то может оказаться целесообразным применение неадаптивного алгоритма.

На рис. 12.2 представлена зависимость $\Delta K/K = f(\Delta\Pi/\Pi)$, ($\Delta K = D - K$, $\Delta\Pi/\Pi = (\tilde{\mu} - \mu)/\tilde{\mu}$), построенная согласно (11), (12) (кривая *1*) при фиксированном отношении сигнал/шум: $\varkappa/\gamma^2 N = 3$, $\mu^2/\gamma^3 N = 4$. Для

сравнения на том же рисунке нанесены аналогичные зависимости, рассчитанные по формулам (10), (11) для случаев $\tilde{\mu}=\mu$, $\tilde{\varkappa}=\varkappa$ (кривая *2*, $\Delta\Pi/\Pi=(\tilde{\gamma}-\gamma)/\gamma$) и $\tilde{\mu}=\mu$, $\tilde{\gamma}=\gamma$ (кривая *3*, $\Delta\Pi/\Pi=(\tilde{\varkappa}-\varkappa)/\varkappa$).

Из графиков видно, что одинаковые ошибки в задании различных параметров дают неодинаковые приращения ошибок фильтрации. При этом «наихудшим» параметром, к выбору величины которого нужно подходить особенно тщательно, является μ (за исключением небольшой области $[-1,0]$). Затем следует γ, и наконец $\varkappa$. Заметим, что параметры γ и $\varkappa$ — неотрицательные; это и наложило ограничение на область изменения $\Delta\Pi/\Pi$.

Аналогичным способом рассчитываются ошибки экстраполяции (см. [98]).

2. Рассмотрим теперь задачу анализа алгоритма

$$\dot{\tilde{m}}_t=y_t(\tilde{K}/N)A_0\cos(\omega_0 t+\tilde{m}_t), \qquad (12.4.13)$$

при помощи которого осуществляется фильтрация фазомодулированного радиосигнала (12.3.20). При этом в качестве $\tilde{K}$ возьмем константу $\tilde{K}=\sqrt{2\tilde{\varkappa}N}/A_0$ (ср. с (6.2.5)). Если $\tilde{\varkappa}$ совпадает с истинным значением параметра $\varkappa$, входящим в (12.3.20), то алгоритм (13) является квазиоптимальным (оптимальным в гауссовском приближении). Если же $\tilde{\varkappa}\neq\varkappa$, то уравнение (13) дает неоптимальный алгоритм.

Уравнение (13) описывает обычную схему ФАП 1-го порядка; вводя мгновенную ошибку слежения за фазой сигнала $\varepsilon_t=x_t-\tilde{m}_t$, можно записать (13) в стандартной для ФАП форме [131]:

$$\dot{\varepsilon}_t+A_1\nu S\tilde{K}_1 y_t\cos(\omega_0 t+\tilde{m}_t)=\zeta_t, \qquad (12.4.14)$$

$$\tilde{K}_1=\tilde{K}A_0/NA_1\nu S=(1/A_1\nu S)\sqrt{2\tilde{\varkappa}/N}. \qquad (12.4.15)$$

Здесь ν — коэффициент преобразования умножителя; S — крутизна преобразования реактивного элемента; A_1 — амплитуда колебаний на выходе перестраиваемого гетеродина; $\tilde{K}_1$ — коэффициент усиления в цепи обратной связи. Так как значение $\tilde{\varkappa}$ выбрано произвольно, то и коэффициент усиления $\tilde{K}_1$, вообще говоря, произвольный.

Точного выражения для среднего квадрата ошибки выделения фазы $D_t=M\varepsilon_t^2$ здесь не удается получить (в отличие от предыдущего случая) из-за нелинейного характера алгоритма. Однако можно найти приближенное выражение, используя линеаризацию $\sin\varepsilon_t\approx\varepsilon_t$, при этом (14) после подстановки $y_t=A_0\sin(\omega_0 t+x_t)+\xi_t$ приобретает вид

$$\dot{\varepsilon}_t=\frac{1}{2}A_0A_1\nu S\tilde{K}_1\varepsilon_t+\xi_{1t}=\zeta_t,$$

где ξ_{1t} — белый шум со спектральной плотностью $(A_1\nu SK_1)^2(N/2)$, приближенно заменяющий член $A_1\nu S\tilde{K}_1\xi_t\cos(\omega_0 t+\tilde{m}_t)$. Указанную линеаризацию можно применять при точной работе алгоритма; такой режим возможен и для неоптимальной ФАП (14), в частности, при малых шумах.

Далее аналогично находим

$$\dot{D}_t=-A_0A_1\nu S\tilde{K}_1D_t+(A_1\nu S\tilde{K}_1)^2(N/2)+\varkappa.$$

Отсюда получим стационарное значение среднего квадрата ошибки неоптимальной фильтрации

$$D = \frac{(A_1 \nu S \widetilde{K}_1)^2 (N/2) + \varkappa}{A_0 A_1 \nu S \widetilde{K}_1} = \frac{\widetilde{\varkappa} + \varkappa}{A_0 \sqrt{\widetilde{\varkappa}}} \sqrt{\frac{N}{2}}. \tag{12.4.16}$$

Если в этом выражении положить $\widetilde{\varkappa} = \varkappa$, то

$$D = \sqrt{2\varkappa N}/A_0 = K, \tag{12.4.17}$$

где K — средний квадрат ошибки квазиоптимальной фильтрации при известном $\varkappa$ [60, 131]. При этом коэффициент усиления (15) «согласуется» с сигналом (так как параметр $\varkappa$ известен), что и превращает неоптимальную схему ФАП в квазиоптимальную.

Сравним средние квадраты ошибок неоптимальной и квазиоптимальной схем; отношение их согласно (16), (17) равно

$$D/K = (1/2)\left(\sqrt{\varkappa/\widetilde{\varkappa}} + \sqrt{\widetilde{\varkappa}/\varkappa}\right) \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что чем больше рассогласование между истинным и выбранным значениями параметра — между оптимальным и неоптимальным коэффициентами усиления (15) — тем больше проигрыш неоптимальной схемы ФАП по сравнению с квазиоптимальной, причем в рассматриваемом случае этот проигрыш не зависит от отношения сигнал/шум и может быть значительным.

Указанного ухудшения работы ФАП в условиях неполной априорной информации можно избежать, если применить адаптивную схему, определяемую уравнениями (12.3.21), (12.3.22), в которой согласование коэффициента усиления достигается в процесе самонастройки — в результате измерения неизвестного параметра. Покупается это ценой усложнения схемы, параметры которой в начальном режиме существенно зависят от времени.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АПВ — апостериорная плотность вероятностей
БСО — байесовская среднеквадратическая оценка
ЛП — логарифм отношения правдоподобия
МОП — модифицированное отношение правдоподобия
ОМП — оценка максимального правдоподобия
ОП — отношение правдоподобия

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айвазян С. А.** Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана—Пирсона и Вальда. — «Теория вероятностей и ее применения», 1959, т. 4, № 1.
2. **Амиантов И. Н.** Избранные вопросы статистической теории связи. М., «Сов. радио», 1971.
3. **Амиантов И. Н., Сосулин Ю. Г.** Характеристики обнаружения флюктуирующих сигналов. — «Вопросы радиоэлектроники. Сер. 10. Техника радиосвязи», 1961, вып. 6
4. **Антонов О. Е.** Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовых помехах. Обнаружение полного известного сигнала. — «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, № 4.
5. **Аоки М.** Оптимизация стохастических систем. Пер. с англ. М., «Наука», 1971.
6. **Баруча-Рид А. Т.** Элементы теории марковских процессов и их приложения. Пер. с англ. М., «Наука», 1969.
7. **Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.** Методы статистического последовательного анализа и их радиотехнические приложения. М., «Сов. радио», 1962.
8. **Блекуэлл Д., Гиршик М. А.** Теория игр и статистических решений. Пер. с англ. М., ИЛ, 1958.
9. **Большаков И. А.** Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. М., «Сов. радио», 1969.
10. **Большаков И. А., Репин В. Г.** Вопросы нелинейной фильтрации. — «Автоматика и телемеханика», 1961, т. 22, № 4.
11. **Бусганг Д., Миддлтон Д.** Оптимальное последовательное обнаружение сигналов в шуме. — В кн.: Прием сигналов при наличии шума. Пер. с англ. Под ред. Л. С. Гуткина. М., ИЛ, 1960.
12. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., «Сов. радио», 1971.
13. **Вазан М.** Стохастическая аппроксимация. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
14. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Сов. радио», 1960.
15. **Валеев В. Г.** Оценка точности марковских моделей при синтезе и анализе систем обработки информации. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1972, № 5.
16. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Обнаружение слабых когерентных сигналов в коррелированных негауссовых помехах. — «Радиотехника и электроника», 1969, т. 14, № 2.
17. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Методы обнаружения слабых сигналов на фоне негауссовых помех с известными априорными распределениями. — В кн.: 4-я конф. по теории передачи и кодирования информации. Секция II. Москва — Ташкент, 1969, с. 19—25.
18. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Многоканальный прием сигналов на фоне помех при негауссовых распределениях наблюдаемых данных. В 2-х ч. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1970, № 2, 4.
19. **Валеев В. Г., Сосулин Ю. Г.** Обнаружение квазидетерминированного сигнала с одновременным измерением его параметров. — В кн.: Теория и техника радиолокации. Под ред. А. Г. Сайбеля. М., «Машиностроение», 1971.
20. **Вальд А.** Последовательный анализ. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1960.
21. **Вальд А.** Статистические решающие функции. — В кн.: Позиционные игры. Пер. с англ. М., «Наука», 1967.
22. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1972.
23. **Величкин А. И.** Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. М., «Сов. радио», 1970.
24. **Витерби Э. Д.** Принципы когерентной связи. М., «Сов. радио», 1970.
25. **Вопросы** статистической теории радиолокации. В 2-х т. М., «Сов. радио», 1963, 1964. Авт.: П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов, А. А. Курикша, В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский, В. В. Широков.
26. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев. Пер. с англ. М., «Наука», 1971.
27. **Гельфанд И. М.** Обобщенные случайные процессы. — «ДАН СССР», 1955, т. 100, с. 853—856.

28. **Гельфанд И. М., Шилов Г. И.** Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
29. **Гихман И. И.** О сходимости к марковским процессам. — «Укр. мат. журн.», 1969, т. 21, № 3.
30. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
31. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.
32. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. В 3-х т. М., «Наука», 1972, 1973, 1975.
33. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
34. **Гостюхина М. А., Сосулин Ю. Г.** Оценочно-корреляционный метод обнаружения сигналов с неизвестной задержкой. — «Радиотехника и электроника», 1976, т. 21, № 7.
35. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М., «Сов. радио», 1972.
36. **Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш.** Моделирование стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачей о «разладке» на аналоговой машине. — «Автоматика и телемеханика», 1966, т. 27, № 4.
37. **Де Гроот.** Оптимальные статистические решения. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
38. **Дуб Дж. Л.** Вероятностные процессы. Пер. с англ. М., ИЛ, 1958.
39. **Дынкин Е. Б.** Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
40. **Ермаков С. М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., «Наука», 1971.
41. **Ершов М. П.** О представлениях процессов Ито. — «Теория вероятностей и ее применения», 1972, т. 17, № 1.
42. **Закс Ш.** Теория статистических выводов. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
43. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно-связанные величины. М., «Наука», 1965.
44. **Ито К.** Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. — «Математика», Сб. пер. ин. ст. 1959, 3 : 5, с. 131—141.
45. **Кабанов Ю. М.** Представление функционалов от винеровского и пуассоновского процессов в виде стохастических интегралов. — «Теория вероятностей и ее применение», 1973, т. 18, № 2.
46. **Кайлатц.** Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки. — ТИИЭР, 1970, т. 58, № 5.
47. **Калман Р. Е., Бьюси Р. С.** Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. — «Техническая механика. Сер. д», 1961, т. 83, № 1.
48. **Карлил Дж. В.** Непараметрические методы в теории обнаружения. — В кн.: Теория связи. Пер. с англ. Под ред. Б. Р. Левина. М., «Связь», 1972.
49. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. Пер. с англ. М., «Наука», 1973.
50. **Коллинз.** Реализуемые фильтры для преобразования случайного процесса в белый шум и их реализация по методу переменных состояний. — ТИИЭР, 1968, т. 56, № 1.
51. **Колмогоров А. Н.** Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1941, т. 5, № 1.
52. **Копсон Э.** Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
53. **Костров В. В., Сосулин Ю. Г.** Об оптимальной нелинейной фильтрации стохастических сигналов в шуме. — «Радиотехника и электроника», 1975, т. 20, № 5.
54. **Костров В. В., Сосулин Ю. Г.** Фильтрация и обнаружение при зависимых сигналах и шумах. — «Радиотехника и электроника», 1975, т. 20, № 7.
55. **Костров В. В., Сосулин Ю. Г.** О некоторых задачах оптимальной интерполяции марковских сигналов. — В кн.: 6-я конф. по теории кодирования и передачи информации — Москва — Томск, 1975, ч. 1, с. 87—92.
56. **Котельников В. А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М., Госэнергоиздат, 1956.
57. **Крамер Г.** Математические методы статистики. Пер. с англ. М., ИЛ, 1948.
58. **Кузьмин С. З.** Цифровая обработка радиолокационной информации. М., «Сов. радио», 1967.
59. **Кульбак С.** Теория информации и статистика. Пер. с англ. М., «Наука», 1967.
60. **Кульман Н. К., Стратонович Р. Л.** Фазовая автоподстройка частоты и оптимальное измерение параметров узкополосного сигнала с непостоянной частотой в шуме. — «Радиотехника и электроника», 1964, т. 9, № 1.
61. **Кунита Х., Ватанабе С.** О мартингалах, интегрируемых с квадратом. — «Математика», Сб. пер. ин. ст. 1971, 15 : 1, с. 66—102.

62. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1974, 1975.
63. **Левин Б. Р.** Асимптотически оптимальные алгоритмы обнаружения сигналов на фоне помех (обзор). — В кн.: Математическая статистика и ее приложения. Томск. ун-т, 1973.
64. **Левин Б. Р., Кушнир А. Ф.** Асимптотически оптимальные алгоритмы обнаружения и различения сигналов на фоне помех. — «Радиотехника и электроника», 1969, т. 14, № 2.
65. **Левин Б. Р., Кушнир А. Ф.** Асимптотически оптимальные ранговые алгоритмы обнаружения сигналов на фоне помех. — «Радиотехника и электроника», 1969, т. 14, № 2.
66. **Левин Б. Р., Шинаков Ю. С.** Байесовская система одновременного различения нескольких сигналов и оценивания их параметров. — «Радиотехника», 1971, т. 26, № 4.
67. **Леман Э. Л.** Проверка статистических гипотез. Пер. с англ. М., «Наука», 1964.
68. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской. — «Изв. АН СССР. Сер. мат.», 1972, т. 36, № 4.
69. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М., «Наука», 1974.
70. **Лихарев В. А.** Цифровые методы и устройства в радиолокации. М., «Сов. радио», 1973.
71. **Лоэв М.** Теория вероятностей. Пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
72. **Лурье А. И.** Операционное исчисление. М., Гостехиздат, 1950.
73. **Мамаев Д. Д.** Об оптимальном адаптивном приеме непрерывных марковских сигналов. — «Радиотехника и электроника», 1972, т. 17, № 3.
74. **Математические** основы современной радиоэлектроники. М., «Сов. радио», 1968. Авт.: Большаков И. А., Гуткин Л. С., Левин Б. Р., Стратонович Р. Л.
75. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление. Пер. с англ. М., «Энергия», 1973.
76. **Мейер П. А.** Вероятность и потенциалы. Пер. с англ. М., «Мир», 1973.
77. **Миддлтон Д.** Введение в статистическую теорию связи. В 2-х т. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1961, 1962.
78. **Миддлтон Д., Эспозито Р.** Новые результаты в теории одновременного оптимального обнаружения сигналов и оценки их параметров в шуме. — «Проблемы передачи информации», 1970, т. 6, вып. 2.
79. **Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.** Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М., «Наука», 1972.
80. **Полляк Ю. Г.** Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., «Сов. радио», 1971.
81. **Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.** Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. М., «Наука», 1967.
82. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
83. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение. Пер. с англ. М., «Наука», 1968.
84. **Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Адаптация систем приема и обработки информации и теория статистических решений. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 3.
85. **Розанов Ю. А.** Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963.
86. **Русас Дж.** Контигуальность вероятностных мер. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
87. **Слуцкий Е.** Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятностей χ_2. М., Изд-во АН СССР, 1950.
88. **Сосулин Ю. Г.** Оптимальное обнаружение некоторых негауссовых сигналов в шуме. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1965, № 6.
89. **Сосулин Ю. Г.** Оптимальное обнаружение марковских сигналов на фоне марковских помех при дискретном времени. —«Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1966, № 4.
90. **Сосулин Ю. Г.** Об оптимальном приеме случайных импульсных сигналов на фоне шума. — «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, № 5.
91. **Сосулин Ю. Г.** О некоторых задачах обнаружения и нелинейной фильтрации сигналов при наличии помех. — В кн.: 3-я конф. по теории передачи и кодирования информации. Секция 4. Москва, 1967, с. 10—17.
92. **Сосулин Ю. Г.** Некоторые вопросы обнаружения и фильтрации сигналов на фоне помех марковского типа. Гауссовские помехи. — «Радиотехника и электроника», 1968, т. 13, № 3.

93. **Сосулин Ю. Г.** Некоторые вопросы обнаружения и фильтрации сигналов на фоне помех марковского типа. Негауссовые помехи. — «Радиотехника и электроника», 1968, т. 13, № 4.
94. **Сосулин Ю. Г.** Обнаружение детерминированных сигналов на фоне негауссовых помех. — В кн.: Теория и техника радиолокации. Под ред. А. Г. Сайбеля. М., «Машиностроение», 1968.
95. **Сосулин Ю. Г.** К задачам многоальтернативного обнаружения сигналов. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1969, № 4.
96. **Сосулин Ю. Г.** Интерполяция и экстраполяция марковских сигналов при наличии помех. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1969, № 5.
97. **Сосулин Ю. Г.** Фильтрация и обнаружение марковских сигналов при неполной априорной информации. — «Радиотехника и электроника», 1969, т. 14, № 12.
98. **Сосулин Ю. Г.** Оптимальный и неоптимальный прием сигналов в условиях неполной априорной информации. — «Радиотехника и электроника». 1970, т. 15, № 12.
99. **Сосулин Ю. Г.** Оценочно-корреляционный принцип приема сигналов на фоне помех и априорная информация. — «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, № 3.
100. **Сосулин Ю. Г.** К теории обнаружения произвольных сигналов на фоне произвольных помех. — «Изв. вузов СССР. Радиофизика», 1971, т. 14, № 10.
101. **Сосулин Ю. Г.** Оценочно-корреляционные методы обнаружения слабых сигналов на фоне помех и математико-эвристический синтез. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1971, № 5.
102. **Сосулин Ю. Г.** Теория обнаружения марковских сигналов на фоне помех и ее применение к радиотехническим задачам. Докторская диссертация, МАИ, 1972.
103. **Сосулин Ю. Г.** Обнаружение сигналов на фоне произвольных помех и обеляющие фильтры. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1974, № 1.
104. **Сосулин Ю. Г., Валеев В. Г.** К задачам обнаружения сигналов с неизвестными параметрами. — «Труды МЭИС». М., «Связь», 1968.
105. **Сосулин Ю. Г., Костров В. В.** Оптимальное и квазиоптимальное обнаружение сигналов на фоне произвольных помех методом обеляющего фильтра. — «Радиотехника и электроника», 1974, т. 19, № 6.
106. **Сосулин Ю. Г., Мерзляк М. Г.** Вопросы сходимости адаптивных алгоритмов обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1975, № 4.
107. **Сосулин Ю. Г., Пивоваров Ю. Л.** Оценочно-корреляционное обнаружение сигнала с неизвестной частотой. — «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, № 9.
108. **Сосулин Ю. Г., Стратонович Р. Л.** Оптимальное обнаружение диффузионного процесса в белом шуме. — «Радиотехника и электроника», 1965, т. 10, № 5.
109. **Сосулин Ю. Г., Фишман М. М.** О последовательном обнаружении сигналов на фоне помех. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1973, № 2.
110. **Сосулин Ю. Г., Фишман М. М.** Оптимальное последовательное обнаружение при информационной мере стоимости наблюдений. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1974, № 3.
111. **Сосулин Ю. Г., Фишман М. М.** Сходимость логарифма отношения правдоподобия к винеровскому процессу в задаче обнаружения произвольного сигнала в белом шуме. — «Радиотехника и электроника», 1974, т. 19, № 12.
112. **Сосулин Ю. Г., Фишман М. М.** Асимптотические характеристики оптимального обнаружения произвольных сигналов на фоне белого шума. — «Радиотехника и электроника», 1975, т. 20, № 2.
113. **Сосулин Ю. Г., Шахурин А. П.** Об одновременном обнаружении и оценивании стохастических сигналов на фоне шумов. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1976, № 1.
114. **Сосулин Ю. Г., Шахурин А. П.** Анализ байесовских систем одновременного обнаружения и оценивания сигналов. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1977, № 1.
115. **Срагович В. Г.** О расчете характеристик обнаружения при квадратичном суммировании сигналов. — «Радиотехника и электроника», 1960, т. 5, № 4.
116. **Стратонович Р. Л.** К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций. — «Теория вероятностей и ее применения», 1959, т. 4, № 2.
117. **Стратонович Р. Л.** Условные процессы Маркова. — «Теория вероятностей и ее применения», 1960, т. 5, № 2.
118. **Стратонович Р. Л.** Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. — «Радиотехника и электроника», 1960, т. 5, № 11.
119. **Стратонович Р. Л.** Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
120. **Стратонович Р. Л.** Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений. — «Вестник МГУ. Сер. мат. и мех.», 1964, № 1.

121. **Стратонович Р. Л.** Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. МГУ, 1966.
122. **Стратонович Р. Л.** Обнаружение и оценивание сигналов в шумах, когда оба или один из них — негауссовские. — ТИИЭР, 1970, т. 58, № 5.
123. **Стратонович Р. Л.** Принципы адаптивного приема. М., «Сов. радио», 1973.
124. **Стратонович Р. Л., Мамаев Д. Д.** Об оптимальном приеме импульсных марковских сигналов. — «Радиотехника и электроника», 1972, т. 17, № 2.
125. **Стратонович Р. Л., Сосулин Ю. Г.** К расчету характеристик обнаружения флюктуирующих сигналов. — «Вестник МГУ. Сер. Физ., астрономия», 1964, № 1.
126. **Стратонович Р. Л., Сосулин Ю. Г.** Оптимальное обнаружение марковского процесса в шуме. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1964, № 6.
127. **Стратонович Р. Л., Сосулин Ю. Г.** Оптимальный прием сигналов на фоне негауссовых помех. — «Радиотехника и электроника», 1966, т. 11, № 4.
128. **Тараскин А. Ф.** Об асимптотической нормальности стохастических интегралов и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса. — В кн.: «Математическая физика», Респ. межведомств. сб. Киев, «Наукова думка», 1970, вып. 8.
129. **Теория** обнаружения сигналов и ее применения. — ТИИЭР. 1970, т. 58, № 5.
130. **Тихонов В. И.** Нелинейная фильтрация и квазиоптимальный характер фазовой автоподстройки частоты. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1965, № 2.
131. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
132. **Тихонов В. И., Кульман Н. К.** Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., «Сов. радио», 1974.
133. **Томас.** Непараметрические методы обнаружения сигналов. — ТИИЭР, 1970, т. 58, № 5.
134. **Транк, Георг.** Обнаружение целей на фоне помех от морской поверхности с негауссовым распределением. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1971, № 7.
135. **Трифонов А. П.** Предельная форма оптимального оператора одновременного обнаружения сигналов и оценка их параметров. — «Изв. АН СССР. Техн. кибернетика», 1972, № 3.
136. **Уилкс С.** Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
137. **Фалькович С. Е.** Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. М., «Сов. радио», 1961.
138. **Фалькович С. А.** Оценка параметров сигнала. М., «Сов. радио», 1970.
139. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее применения. Пер. с англ. М., «Мир», 1964, т. I, 1967, т. II.
140. **Финк Л. М.** Теория передачи дискретных сообщений. М., «Сов. радио», 1970.
141. **Фуджисаки, Каллианпур, Кунита.** Стохастические дифференциальные уравнения в задачах нелинейной фильтрации. — «Математика», Пер. ин. ст. 1973, 17 : 2.
142. **Хазен Э. М.** Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М., «Сов. радио», 1968.
143. **Хазен Э. М.** О стохастических дифференциальных уравнениях для апостериорного распределения вероятностей в задачах адаптивной фильтрации и обнаружения сигналов. — «Автоматика и телемеханика», 1971, № 11.
144. **Хелстром К.** Статистическая теория обнаружения сигналов. М., ИЛ, 1963.
145. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах. М., «Наука», 1968.
146. **Цыпкин Я. З.** Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
147. **Шахгильдян В. В., Лохвицкий М. С.** Методы адаптивного приема сигналов. М., «Связь», 1974.
148. **Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.** Система фазовой автоподстройки частоты. М., «Связь», 1972.
149. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М., «Наука», 1969.
150. **Ярлыков М. С., Миронов М. А.** О применимости гауссовской аппроксимации в марковской теории оптимальной нелинейной фильтрации — «Радиотехника и электроника», 1972, т 17, № 11.
151. **Clark J. M. C.** The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. — «Ann. Mathem. Stat.», 1970, v. 41, № 4.
152. **Fisk D. L.** Quasimartingales. — In: Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, p. 369.
153. **Fraser D. A. S.** Non-parametric methods in statistics. N. Y., J. Wiley, 1957.
154. **Frederikson A., Middlton D., Van de Linde D.** Simultaneous signal detection and estimation under multiple hypotpeses. — «IEEE Trans.», 1972, v. IT-18, № 5.
155. **Kadota T. T.** Nonsingular detection and likelihood ratio for random signals in white gaussian noise. — «IEEE Trans.», 1970, v. IT-16, № 3.
156. **Kailath T. A.** General likelihood ratio formula for random signals in gaussian noise. — «IEEE Trans.», 1969, v. IT-15, № 3.

157. **Laidain M.** Test entre deux hypotheses pour un processus defini par ure equation differentielle stochastique. — «Rev. Cethedec», 1971, v. 8, № 26.
158. **Levin B. R., Shinakov Yu. S.** Asymptotic properties of Bayes estimates of parameter of a signal masked by inference. — «IEEE Trans.», 1972, v. IT-18, № 1.
159. **Middleton D.** On the detection of stochastic signals in additive normal noise. — «IRE Trans.», 1957, v. IT-3, № 2.
160. **Middleton D.** Canonically optimum threshold detection. — «IEEE Trans.», 1966, v. IT-12, № 2.
161. **Middleton D., Esposito R.** Simultaneous optimum detection and estimation of signals in noise. — «IEEE Trans.», 1968, v. IT-14, № 3.
162. **Pachers I.** A table of bias levels useful in radar detection problems. — «IRE Trans.», 1958, v. IT-4, № 1.
163. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method. — «Ann. Mathem. Stat.», 1951, v. 22, № 1.
164. **Schwartz M., Richman S. M.** Extremal statistics in computer simulation of digital communication systems. — In: Spring Joint Comp. Conf., 1968.
165. **Sorenson H. W., Alspach D. L.** Recursive bayesian estimation using gaussian sums.— «Automatica», 1971, v. 7, p. 465—479.
166. **Swerling P.** Detection of fluctuating pulsed signals in the presence of Noise. — «IRE Trans.», 1957, v. IT-3, № 3.
167. **Tables** of the error function and of its first twenty derivations. Harvard Univers. Press, 1952.
168. **Wiener N.** Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. N. Y., J. Wiley, 1949.

ОГЛАВЛЕНИЕ

2р. 90к.

ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

